ARITHME-TICA.

Oratorii vindocinensis

PARISIIS,
Apud Andream Wechelum.
1562.
Cum privilegio Regis.

LIBER PRIMUS
ARITHMETICÆ.

Cap. 1. quid arithmetica, numerus, unitas, & quæ partes arithmeticæ.

1. ARITHMETICA *est doctrina bene numerandi.*

2. *Numerus est ex unitatibus collecta multitudo.* 2.d.7.

Ut binarius numerus est collectus ex uno & uno, ternarius ex uno & uno & uno, quaternarius ex uno & uno & uno & uno, & quilibet deinde numerus est ex unitatibus collecta multitudo.

3. *Unitas est secundum quam unumquodque unum dicitur.* 1.d.7.

Ut unus Deus, unus mundus, unus Rex. Unitas numerus non est: nec enim est ex unitatibus collecta multitudo: Attamen ut unitas definitur, secundum quam unumquodque unum dicitur, sic numerus definiri potest, secundum quem unumquodque numeratur:ut unum,duo, tria: & ſic unitas in multis arithmeticæ partibus pro numero uſurpatur. Proprié igitur unitas numerus nõ eſt,ſed initium numeri,é quo primúm numerus fit,& in quod ultimum reſolvitur,eſtq; in numero aliquid minimũ, nempé unitas,quãvis nihil eſſe poſſit maximum. Arithmeticæ partes duæ ſunt.

4. *Arithmeticæ prima pars eſt, quæ interpretatur ſimplices qualitates numerorum.*

Et quidem in generali numeratione primúm: deinde in ſpecialibus differentiis numerorũ.Generalis autem numeratio eſt prima aut conjũcta: Prima,ut additio & ſubductio

Cap. 2. de additione,ubi de arithmeticis notis.

5. *Additio eſt numeratio prima, qua numerus cum numero ſemel additur, & habetur totus.*

Hic ſunt decem unitates,1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. Quibus addendis, numeramus unum, duo, tria, quatuor,quinque, ſex, ſeptem, octo,novem,decem,ubi ad numerum antecedentem unitas additur: Addãtur duo cum duobus,totus erit quatuor,quinque cum tribus,totus erit octo: Cujuſvis

vis autem numeri addendi & colligendi decem ſunt notæ, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 8. 9. 0: quarum prima unum ſignificat, ſecũda duo, tertia tria, quarta quatuor, quinta quinque, ſexta ſex, ſeptima ſeptem, octava octo, nona novem: Circulus, quæ nota eſt ultima, nil per ſe ſignificat: valet tamen ad alias notas amplificandum. Amplificationis veró gradus ſunt quatuor, deincepſq; perpetuó ſimiliter iterantur. Nam de primis novem, quælibet ſola aut ultimo univerſi numeri loco ſuum numerum ſemel exprimit, penultimo decies, tertio deincẽties, quarto millies, quinto decies millena, ſexto centies millena, ſeptimo millies millena'& ſic deinceps. Numeros igitur ita notabis, unum 1, undecim 11, centum undecim 111, mille centum undecim 1111. Duo 2. viginti duo 22, ducenta viginti duo 222, duo millia ducenta viginti duo 2222. mille ducẽta triginta quatuor 1234, Ergo in hac amplificatione circulus amplificabit notam ſibi præpoſitam. Notabis enim his notis 10, viginti 20, triginta 30, quadraginta 40, centum 100, ducenta 200, trecenta 300, quadringenta 400. Duo millia viginti 2020, quater millena millia, triginta millia ducenta unum 4030201. Atqui ſi numeri pluribus notis collecti periodus longior fuerit, ut eam numerare condiſcas, millenarii loci, tanquã in membris orationis ſenſus abſoluti, punctis diſtinguantur, ultimum punctum erit millium, penultimum millenorum millium, tertium millies millenorum millium, quartũ millies millies millenorum millium: Tum singula pũcta deinceps, si plura sint, millies amplificabunt. Numerum igitur decem notis sic additum & interpunctum 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0, tanquam mẽbris quatuor distinctam periodum numerabis. Primum membrum millies millena millia, secundum ducenties tricies quater millena millia, tertium quingẽta sexaginta septem millia, quartum octingenta nonaginta. Atque hæc interpunctio tantisper adhibenda, dum te exerceas in notis arithmeticis. Si numeri diversi pluribus notis constent, nec totus simul cum toto addi possit, sinistrorsum singulares cum singularibus, denarii cum denariis, & sic deinceps addendi, ut excrescentes summa locis excrescentibus ordine faciliùs notentur, & ex iis additus & collectus numerus, interjecta lineola subnotetur. Quæratur igitur quis numerus sit totus é 5 6 7 8 9, & 1 2 3 4, ordine dispositis numeris, ut homogeneri respondeant, sic

5 6 7 8 9
  1 2 3 4

Incipies ab ultimo loco, 9 & 4, sunt 13: subnotabis 3, reservabis 10, pro 1. sequentis loci: Ergo dices sequenti loco, 1 & 8 & 3, sunt 12, subnotabis 2, & reservabis, ut anteá, 10 pro 1, sequẽtis loci: Tum 1 & 7 & 2, sunt 10: subnotabis 0, reservabis similiter 10, pro 1, sequentis loci: Tandem 1 & 6 & 1, sunt 8, quæ subnotabis: Postremó 5 sola reperies, adnotabis denique 5, & invenies

nies his duobus numeris additis totum esse 58-023. Inductionis summa sic erit,

5	6	7	8	9
	1	2	3	4
5	8	0	2	3

Cap. 3. de subductione.

6. *Subductio est numeratio prima, qua numerus á numero semel subducitur, & habetur qui sit reliquus.*

Subducito 2 de 5, reliquus erit 3, subducito 4 de 9, reliquus erit 5. Subducenda sint 234 de 345, dispositis ordine numeris, ut respondeant homogenei inter se hoc modo,

3	4	5
2	3	4

Subducendo infrá, suprá autem á quo subductio facienda: Incipies á sinistra dextrorsum, cõtraquám in additione, ut 2 subductis é 3, supernotabis 1, deletis 3 & 2: deinde subduces 3 de 4, & supernotabis 1, deletis 4 & 3. Denique subductis 4 é 5, supernotabis 1, deletis 5 & 4, unde invenies reliquum esse 111, cúm subduxeris 234 á 345. Inductio tota sic erit,

1	1	1
~~3~~	~~4~~	~~5~~
~~2~~	~~3~~	~~4~~

Sed in hac ſubductionis via, cúm ſequẽs ſubducẽda nota major eſt quám ſuprapoſita, ne notarum litura moleſta ſit, commodiús é reliquo præcedente 1 mente reſervabis, quod notam ſequentem denario augeat, ut ſi ſubducenda ſint 345 de 432, cúm ſubduces 3 de 4, non ſupernotabis 1, quia 4 ſequens ſubducenda nota, major eſt ſuprapoſito 3, ſed illud mente reſervabis: & 4 ſubductis á 13, manerent 9, ſed 8 tantúm ſupernotabis, & 1 mente reſervabis: quia 5 ſequens ſubducenda nota major eſt. Itaque 5 ſubductis á 12, reliqua 7 ſupernotabis, unde invenies ſubductis 345 de 432, relinqui 87. Tota inductio ſic erit.

$$\begin{array}{ccc} & 8 & 7 \\ \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} \end{array}$$

Hæc ſubducendi vera via eſt, nec omnino priús antecedens nota eſt ſubducẽda, quám provideris, unde reliquæ ſubduci poſſint. Sic diviſio, id eſt, multiplex ſubductio poſteá progredietur, & ſic de ſequentibus providebit. Itaque meditãda priús eſt ſimplex iſta ſubductio, unde multiplex illa poſteá formãda ſit. In majoribus autem exemplis idem eſt, ut ſubductis 48765293 de 57295490, ſupererunt 8530197.

Cap. 4. de multiplicatione.

Numeratio ſimplicis numeri prima ejuſmodi eſt, di eſt,conjuncta deinceps erit in multiplicatione & diviſione.

7. *Multiplicatio eſt numeratio conjuncta, qua multiplicandus toties additur, quoties unitas in multiplicante continetur, & habetur factus. 15.d.7.*

Unitas nil multiplicat: ſemel 1, ſemel 2, ſemel 3, eſt 1, 2, 3, quamvis plus ſit addita. Nam 1 & 1, ſunt 2, item 1 & 2, ſunt 3: At 2 ſibi additus eſt 4, quot item efficit ſui multiplicatione. Nam bis bina ſunt item 4. Id in illis eſt proprium: At 2 cæteros numeros multiplicans, auget, ut bis 3, ſunt 6. Sic addis 3 bis quoties nempè unitas in 2 multiplicante continetur: bis 4, ſunt 8: addis enim 4 bis quoties unitas in 2 multiplicante continetur. Et hæc prima multiplicationis ſpecies, duplicatio dicitur: cujus tamen ars eadem, quæ reliquarum multiplicationum: bis quina ſunt 10, ſic notabis,

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

8. *Si duo numeri fuerint facti á duob⁹ inter ſe multiplicatis, erũt æquales. 16.p.7.*

Ut quater quina, ſunt 20, & quinquies quaterna, ſunt item 20.

9. *Si numerus fuerit factus á duobus*

totis, erit æqualis factis ex altero toto & segmentis reliqui. 1.p.2.

Ut septies octona, sunt 56. hic factus est numerus é duobus totis 7 & 8. Seca 8 in 4 & 4, & utrumque segmentum multiplica per 7, facies 28 & 28, é quibus additis, restitues 56. Ergo major multiplicatio hujusmodi proponatur, & quæratur, quis numerus efficiatur 456 per 4 multiplicatis. Sinistrorsum ut in additione procedes, & multiplicátem duces per tres multiplicandi notas sigillatim, & tribus trium segmentorum multiplicationibus singularibus multiplicationem totius cum toto absolves, numeris ita dispositis sic incipies,

4 5 6
4

Quater 6 sunt 24: notabis igitur 4, & 20 reservabis pro 2 loci sequentis: quater 5 sunt 20, & 2 reservata sunt 22, notabis 2, reservabis iterum 2 in locum proximum: quater 4 sunt 16 & 2 reservata sunt 18, quæ notabis integra. Inductionis summa sic erit.

	4	5	6
			4
1	8	2	4

Unde invenies 456 per 4 multiplicatis fieri 1824. Hic multiplicasti per 4 totum multiplicatorem, tria segmenta multiplicandi, tanquam separatim multiplicasses 6 per 4, & fecisses 24;

Deinde

Deinde 50 per 4, & fecisses 200. Denique 400 per 4, & fecisses 1600, postremó tres factos singulares addidisses, hoc modo,

1600
200
24
1824

tantumque fecisti, ac si totum hoc 456, per totum 4 uná multiplicasses.

10. *Si numerus fuerit factus á duobus totis, erit æqualis factis é segmentis utriusque.* 1.*p*.7.

Ut 72 est factus é totis 8 & 9, frangatur uterque in quotlibet segmenta, ut 8 in 3 & 5, 9 in 2 & 7, & singula per singula multiplica, facies 35. 10. 21. 6. é quibus additis restitues 72. Sed proponatur exemplum pauló plenius, & per ista segmenta tum multiplicandi, tum multiplicantis multiplicatio inducatur: ut 2070 per 204 multiplicentur, singularis inductio segmentorum, componet tandem 422280. Inductionis summa sic erit.

2070
204
8280
0000
4140
422280

Quo in exēplo, ficut in cæteris omnibus circulus per circulum, aut circulus per numerū nihil efficit. Circulus itaque pro inventione talis multiplicationis, notabitur ad fequentes notas augendum.

Numeros in circulum definētes multiplicare compendio poffumus, detractis ultimis circulis: Deinde iifdem facto poftpofitis: ut fi multiplicentur 7 2 0 0 per 4 5 0, omiffis circulis illic duobus, hic uno multiplicabis 7 2 per 4 5, & facto 3 2 4, poftpones tres circulos, hoc modo, 324000.

Cap. 5. de divifione.

11. *Divifio eft numeratio conjuncta, qua divifor fubducitur á dividendo quoties poteft, & habetur quotus.*

Sic divifio 1 2 in 3 eft fubductio 3 quater iterata, & habetur 4, pro quoto. Dividendus igitur numerus, eft tanquam hæreditas dividenda: divifor eft numerus partium, velut hæredum, quibus ex æquo dividatur, quotus eft pars quota hæredis cujufque.

12. *Numerus minor eft pars majoris aut partes. 4. p. 7.*

13. *Pars quæ dividit majorem. 3. d7.*

Ut 3 eft pars 1 2, nempe quarta.

14. Par-

14. *Partes quando nō dividit majorē.*
4. d.7. Ut 8 non dividit totum 12. Nam cúm semel subduxeris, manent 4. Itaque 8 sunt duæ quartæ duodenarii. Pars illa quota, hæc quanta vulgó dicitur.

15. *Si numerus in numerū fuerit divisus, quot⁹ erit pars cognominis divisori.39.p.7*
Ut 12 dividitur in 3, & quotus 4 est tertia pars divisi.

16. *Et si numerus habuerit partē quālibet, dividetur in numerum parti cognominem.40.p.7.*

Ut 12 habet tertiam partem, & ideó dividitur in 3. Quotus autem ille divisori cognominis adnotatur ad latus. Sic 18 divisis in 2, quotus erit 9, hoc modo,

18 (9
2

Et hæc prima in 2 divisio dicitur dimidiatio, cujus tamen ars eadem est quæ divisionis in 3 4, & quemlibet alium numerum. Si divisio tota simul expediri non possit, inductione est utendū, & quidem dextrorsúm, ut in subductione. Exēplum sit primum de divisore simplici. Dividantur 7476 per 6. Notabis primúm dividendum & divisorem sic,

7 4 7 6
6

E 7 potes ſubducere 6 ſemel,& manet 1. notabis igitur 1 pro quoto, & deletis 7 dividendo & 6 diviſore, ſuperſcribes 1. Prima inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll} 1 & & & \\ \cancel{7} & 4 & 7 & 6 \quad (1 \\ \cancel{6} & & & \end{array}$$

Secũdó produces 6 diviſorem in proximum locum. Jam 6 potes ſubducere bis á 14, & manent 2. Adnotabis igitur quotum 2, & deletis 6 & 14, ſuperſcribes 2 reliquum. Secunda inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll} \cancel{1} & 2 & & \\ \cancel{7} & \cancel{4} & 7 & 6 \quad (12 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & & \end{array}$$

Tertió produces 6 diviſorem in proximum locum 27. unde potes ſubducere quater,& manẽt 3. Adnotabis igitur quotum 4, & deletis 27 & 6, ſuperſcribes 3. Tertia inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll} \cancel{1} & \cancel{2} & 3 & \\ \cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{7} & 6 \quad (124 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \end{array}$$

Poſtremó produces in reliquum locum 36,vnde potes ſubducere ſexies,& nihil manet. Adnotabis igitur 6 quotum,deletis 36 & 6. Tota inductio ſic erit,

$$\begin{array}{llll} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \\ \cancel{7} & \cancel{4} & \cancel{7} & \cancel{6} \quad (1246 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} \end{array}$$

Hic invenis 7476 in 6 diviſis quotum eſſe

12346

1 2 4 6: Exemplum deinde ſit de diviſore multiplici, qui per partes ſuas æqualiter ſubducendus ſit à ſuprapoſitis diuidendi notis, quoties nempe quotus continetur. Et hic ſubductio vera, de qua dixi, plané cernitur, cúm ſubducere incipias dextrorſum ſingulas ſubducendi notas anté meditando, quám quidquã de parte quota ſtatuas. Dividantur igitur 1 4 4 per 1 2: Notabis primúm dividendum & diviſorem ſic,

1 4 4
1 2

Ac videbis 1 ab 1 ſemel ſubduci, & toties 2 á 4, & 2 reſtabunt: adnotabis igitur 1 pro quoto, & deletis 1 4 & 1 2, ſuperſcribes 2. Inductio prima ſic erit,

  2
~~1~~ ~~4~~ 4   (1
~~1~~ ~~2~~

Secundó produces diviſorem in proximum locum 2 4, ac videbis á 2 bis ſubduci poſſe: & 2 á 4 toties, neque quicquam reſtare. Inductio tota ſic erit,

  ~~2~~
~~1~~ ~~4~~ ~~4~~   (12
~~1~~ ~~2~~ ~~2~~
  ~~1~~

In prima inductione hujus exempli, ſecunda diviſoris nota ſæpiús ſubduci poterit, quám prima. Sit exemplum ubi prima ſæpiús ſubduci poſſit quám ſecũda, & quidem diviſor ſit majorum notarum, ubi etiam multiplices istæ subductiones multiplicatione quoti per divisorem totum, præsidio memoriæ tutiús recolligentur, quám expedirentur separatim singulæ. Dividátur 8 4 1, per 2 9. Notabis primó dividendum & divisorem sic,

8 4 1
2 9

Ac videbis 2 ab 8 quater quidem subduci posse. At toties 9 á 4 subduci non posse. Potes etiam 2 ter subducere ab 8; sed á reliquis 2 4 non potes toties subducere 9. Subduces igitur, ut æqualitas subductionis in partibus divisoris observetur, 2 ab 8 tantúm bis, & à reliquis 4 4 1 toties subduces 9, & manebunt 2 6. Adnotabis igitur 2 pro quoto, & per eum multiplicato divisore, recolliges in vnũ, quod ista multiplicis subductionis æquatione comprehendisti, & facies 5 8, quæ deleto divisore, superscribes dividendo, & ab eo subduces, manebunt 2 6, quæ subducendo 5 8, & suprapo∫ito 8 4. deletis, superscribētur. Inductio prima sic erit,

2 6
~~8~~ ~~4~~ 1 (2
~~2~~ ~~9~~
~~5~~ ~~8~~

Secundó produces divisorem in reliquum dividendi locum. Sic potes 2 subducere tredecies á suprapo∫ito dividendo 2 6. Verúm ab uno

reli-

reliquo non potes ſubducere 9 toties. Nec omnino fieri poteſt, ut nota diviſoris ulla, in ulla diviſione pluſquã novies hac inductionis via ſubducatur: quia major numerus quã 9 unica nota & unico loco comprehendi non poteſt. Cúm veró 2 á 26 novies ſubduxeris, á reliquis 8 1 poteris ſubducere 9 toties. Adnotabis igitur 9 pro quoto, & per eum multiplicato diviſore, facies 2 6 1, quæ deleto diviſore, ſubſcribes dividendo, ab eoque ſubduces, deletis infrá ſupraq; numeris, tum ſubductis, tum inde facta ſubductio eſt, nihil reſtabit. Tota inductio ſic erit,

2 6
8 4 1 (29
2 9 9
5 8 1
2
2 6

Si contingat diviſorem aliquo poſt primum loco majorem eſſe dividendo, circulus in quoto adnotetur: ſic diviſis 6 0 8 0 0 per 3 0 4, quotus eſt 2 0 0, & primo tantúm loco diviſor ſubducitur. Quód ſi in relictis medio ſpacio vacuus locus offendatur, circulus videlicet aſcribendus erit, quod accidet, ſi dividas 3 6 4 in 2 6, ubi quotus erit 1 4. ſic,

1 0
3 6 4 (14
2 6 6
2

Cap. 6. de numeratione partium.

Si peracta tota divisionis inductione aliquid é dividendo relinquatur, propositus numerus nō est proprié divisus, sed numerus, qui divisione est omninó subductus, reliquorū autem est sua quædam numeratio.

17 *Dividendus minor divisori majori interjecta linea superponitur, illeque numerus, hic nomen appellatur.*

Ut si 5 diviseris in 2, quotus erit 2, & reliquum unum nominabitur una secunda, & ita notabitur $\frac{1}{2}$: item divisis 11 in 3, quotus erit 3, & reliquum duæ tertiæ, sic $\frac{2}{3}$, atque ita reliquarum partium numerus erit ipsum reliquum, nomen veró divisor.

18. *Quantum numerus partium abest á nomine, tot unius integri partes dividēdo desunt, ut semel ab eo divisor subducatur.*

Ut in $\frac{4}{12}$ desunt $\frac{8}{12}$.

19. *Si numerus sit æqualis nomini, totus est, si major, plus toto, si minor, minus.*

Ut $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{2}{3}$.

20. *Pars autem major est, cujus nomen*

est

est minus, minor, cujus nomen est majus.

Ut $\frac{1}{2}$ major quám $\frac{1}{3}$, vel $\frac{1}{4}$, & sic in cœteris. Est etiam in particulis & partibus partium sua quædam distincta notatio, & earum minima notatur, ut partes reliquæ nulla interjecta linea. Ergo tres quartæ duarum tertiarum unius secũdæ, ita notabuntur $\frac{3}{4}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{2}$.

21. *Partium cognominum numeratio, spectat solos numeros.*

Sic igitur adde $\frac{4}{2}$ ad $\frac{6}{2}$, totæ erunt $\frac{10}{2}$. A $\frac{10}{2}$ subducito $\frac{4}{2}$, manebũt $\frac{6}{2}$. Sic in $\frac{3}{2}$ divisis $\frac{12}{2}$, quotus est 4, Item in $\frac{8}{2}$ divisis $\frac{32}{2}$, quotus est 4, unde intelligis partientem partem in partita quater integré contineri.

Multiplicatio autem multiplicat numeros simul & nomina, sive eadem sive diversa: quia multiplicandæ partes toties addẽdæ sunt, quot partes in multiplicantibus continẽtur. Sic $\frac{3}{5}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{15}{45}$. Sic $\frac{2}{7}$ multiplicent $\frac{5}{9}$, facient $\frac{10}{63}$.

Sed aliquandó integri & partium permista numeratio est, ut integer per partes, vel integer cum partibus per integrum solum, vel per integrum cum partibus expediri debeat.

Additio nihil mutat: 2 & $\frac{2}{3}$ sunt 2 $\frac{2}{3}$, 2 & $\frac{2}{3}$ cũ 2, sunt 4 $\frac{2}{3}$, 2 $\frac{2}{3}$, & 4 $\frac{2}{3}$, sunt 7 $\frac{1}{3}$.

Subductio ex integris capit unũ pro tot partibus, quantum est nomen: ut á duobus subducito $\frac{2}{3}$ é 2 sumes 1 pro $\frac{3}{3}$, á $\frac{3}{3}$ subduces $\frac{2}{3}$, tum é 2 manebit 1 $\frac{1}{3}$, á $\frac{9}{3}$ tolle 2 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$. A 2 $\frac{1}{3}$ tolle 1 $\frac{1}{3}$, manent $\frac{2}{3}$.

Multiplicatio integrum per partes multiplicat, ſubjiciendo integro tanquam numero 1 pro nomine ſic $\frac{3}{1}$ per $\frac{2}{3}$ faciunt $\frac{6}{3}$, id eſt 2.

Integer veró cum partibus per integrum ſolúm, vel cum partibus multiplicari poteſt ſeparatim. ſic 7 $\frac{1}{6}$ per 2, facit 14 $\frac{2}{6}$. Sic 7 $\frac{1}{2}$ per 2 $\frac{1}{3}$, faciunt primó 14 $\frac{2}{2}$, id eſt 15: deinde $\frac{7}{3}$ & $\frac{1}{6}$, id eſt 2 $\frac{1}{2}$, quibus additis totus eſt 17 $\frac{1}{2}$.

In diviſione idem fieri poteſt, ut ſi dividas 5 $\frac{1}{3}$ in 2 $\frac{2}{3}$, ſubducere potes 2 á 5 bis: item ab 1 reliquo & $\frac{1}{3}$, id eſt á $\frac{4}{3}$, potes ſubducere toties $\frac{2}{3}$. Sed ejuſmodi exempla in multiplicatione & diviſione rara erunt, in quibus partes expediri poſſunt abſque reductione, de qua poſteá, ſicuti de reliqua partium inventione in nominibus diverſis.

Cap. 7. de primis & factis numeris.

Atque hæc numeratio communis eſt, unde differentia numeri triplex oritur, prima numerus dicitur primus aut factus.

22. *Primus eſt numerus individuus ab alio numero.* 11.*d*.7.

Ut 2, 3, 5, 7. Si enim numeri á nullo alio numero dividi poſſunt, nec ideo facti ſunt ab alio numero.

23. *Factus eſt numerus dividuus ab alio*

lio numero. 13.d.7.

Ut 4 dividitur á 2, 6 á 3, 8 á 4. Itaque factus numerus fit multiplicatione veri numeri per verum numerum.

24. *Si numerus fuerit factus, erit dividuus ab aliquo primo.* 33.p.7.

Ut 6 factus, est dividuus á 3 primo.

25. *Si factus á duobus datis sit dividuus á primo, alter datorum erit dividuus ab eodem.* 32.p.7.

Ut 48 factus ab 8 & 6, est dividuus á 3, á quo & 6 etiam dividuus est. Primus & factus numerus ejusmodi sunt, sed alia ex his partitio cõponitur primorum inter se & factorum inter se.

26. *Primi inter se sunt numeri ab unitate sola dividui cõmuni divisore.* 12.d.7.

Ut 2 & 3. Utrum autem numeri dati primi sint inter se, cognoscitur subductione & divisione.

26 *Si duobus numeris inæqualibus datis, vicißim subducto semper minore á majore quoties poterit, sola unitas reliqua diviserit antecedentem, dati erunt primi inter se.* 1.p.7.

Ut 2 & 3 ſunt primi inter ſe: quia ſubducto minore 2 á majore 3, ſola eſt unitas, quæ præcedentem dividat. Sic in 8 & 9. Sed in majore numerorum differentia idem ſubductione multiplici & diviſione multó promptiús expedietur, ut in 27 & 8. Nam prima diviſio 27 in 8, relinquet tantúm 3: ſecunda diviſio 8 in 3. relinquet 2. tertia 3 in 2, relinquet unitatem ſolam, & rem conficiet. Si de tribus aut compluribus quæſtio ſit, primi ſint inter ſe, necne, cúm de duobus exploratum fuerit, conſtat hos duos ad quoſcunq; alios fore primos, quia eorum præter unitatē diviſor communis nullus erit.

28. *Si numerus primus non diviſerit datum numerum, erit primus ad eum.31.p.7.*

Sic 3 eſt primus ad 5.

29. *Si numerus diviſerit alterum duorum inter ſe primorum, erit primus ad reliquum.25.p.7.*

Ut 6 & 5 ſunt primi inter ſe, & 3 dividens ipſum 6 eſt primus ad reliquum 5. Atque ita dati primi inter ſe numeri cognoſcuntur ſubductione & diviſione: Inueniuntur autem & procreantur additione & multiplicatione, additione primúm.

30. *Si duo dati numeri fuerint primi inter ſe, & totus é datis erit primus ad utrumque:*

trumque: Et si totus é datis fuerit primus ad alterū, dati erunt inter se primi. 30. p. 7.

Ut 8 & 9 sunt inter se primi, & totus ex iis 17 est primus ad 8 & primus ad 9: & contrá, quia totus 17 est primus ad 8, vel ad 9: ideó dati 8 & 9 sunt primi inter se: Multiplicationis inventio copiosior est.

31. *Si duo numeri sigillatim fuerint primi ad aliquem factus ab iis erit primus ad eundem. 26. p. 7.*

Ut 4 & 5 sunt primi sigillatim ad 9, & 20 factus ab iis est primus ad 9.

32. *Si duo numeri fuerint primi inter se, factus ab altero erit primus ad reliquum. 27. p. 7.*

Ut 2 & 3 sunt primi inter se, & 4 factus á 2 est primus ad 3.

33. *Si duo numeri ad duos numeros sigillatim fuerint primi, facti ab iis erunt primi inter se. 28. p. 7.*

Ut 8 & 9 sunt sigillatim primi ad 7 & 5, nempe 8 ad 7 & 5: item 9 ad 7 & 5. Itaque 72 & 35 ab iis facti, sunt primi inter se.

34 *Si duo numeri fuerint primi inter*

se, facti ab iis erunt primi inter se, & facti á datis per postremos factos deinceps perpetuó primi erunt,

Ut in hoc ordine,

	2	4	8	16	32
	3	9	27	81	243

35. *Facti inter se sunt numeri, dividui ab aliquo numero comuni divisore.* 14.d.7

Ut 4 & 6 facti sunt inter se, quia 2 est illis communis divisor. Duo autem hic quæruntur, maximus divisor & minimus divisus.

36. *Si duobus numeris datis inæqualibus factis inter se, minor subducatur vicißim á majore quoties poterit, primus reliquus dividens antecedentem, erit maximus communis divisor datorum,* 2.p.7.

Ut in 4 & 6, subducatur 4 minor á majore 6, reliquus 2 dividet antecedentem 4. Itaque 2 est maximus communis datorum divisor. Sic in 21 & 15, subducto vicissim 15 á 21, & 6 reliquo á 15, tandem relinquetur 3 communis mensura.

37. *Qua via duorum maximus communis divisor inventus est, eadem trium & quamlibet multorum invenietur.* 3p.7.

Nam cum præcedentium duorum maximus com-

communis divisor repertus fuerit, ipsius & sequentis numeri divisor similiter inquirendus est, ut in 8, 6, 4, maximus cõmunis divisor 8 & 6 est 2, tum maximus cõmunis divisor 2 & 4 est iterũ 2. Ergo 2 est maximus cõmunis divisor in 8,6,4: sic in 12,8,6, maximus cõmunis divisor est itẽ 2. Sic in 6, 12, 18, 24, maximus communis divisor est 6. Hic compendium est.

38 *Si numerus minor diviserit majorẽ, erit maximus communis divisor utriusq;.*

Ut 4 dividit 12, & est maximus divisor & sui et 12. E doctrina maximi divisoris sequitur per oppositum doctrina divisi minimi.

29. *Si numerus fuerit factus ab altero datorum per alterius divisorem cognominem maximo communi divisori, erit minimus divisus á datis. 36.p.7.*

Sic minimus divisus á 12 et 8 est 24. Nam si diviseris 12 et 8 per 4 maximum divisorem, habebis cognominem partem in altero 3, in altero 2. Jam multiplica alterné vel 12 per 2, vel 8 per 3, habebis 24. Exemplum sic est,

24

12 X 8

4) 3 X 2

40. *Si duo numeri diviserint aliquẽ, mi*

nimus ab illis diviſus, dividet eundem. 37.*p*.7.

Ut 6 & 4 dividunt 24 & 12 minimus diviſus á 6 & 4, dividit eundem. Ex illa generali inveniédi minimi diviſi propoſitione, compendium duplex oritur.

41 *Si numerus fuerit factus á duobus inter ſe primis, erit minim⁹ diviſus á datis.*

Sic minimus diviſus á 3 & 2, eſt 6, quia 1 maximo communi diviſori cognominis in 3, diviſor eſt 3, qui multiplicans 2, facit 6: contrá in 2 diviſore cognominis maximo diviſori eſt 2, qui multiplicans 3, facit etiam 6. Itaque cúm unum maximus diviſor nihil dividat, multiplicatio ſola hic erit, diviſio fruſtrá adhiberetur, ut hic,

$$\begin{array}{c} 6 \\ 1)\; {}^{3}_{3} \times {}^{2}_{2} \end{array}$$

42. *Si numerus major fuerit diviſus á minore, erit minimus diviſus ab utroque.*

Sic ab 8 & 4 minimus diviſus eſt 8, quia maximo eorũ diviſori 4 cognominis diviſor in 8 eſt 2, qui multiplicans 4, reliquum facit 8: ſic idem maximo diviſori cognominis in 8 diviſor eſt 1 qui multiplicans 8, facit etiam 8. Atque hoc compendium ſuperiore majus eſt, & hic tum diviſio, tum multiplicatio fruſtrá eſſet, ut vides in ſubjecto exemplo.

$$\overset{8}{\smile}$$
$$4)\ {}^{4}_{1} \times {}^{8}_{2}$$

Ergo hoc duplex compendium est é prima propositione inveniendi minimi divisi. Eadem via minimus á tribus aut quatuor aut quotlibet divisis invenietur. 38.p.7.

Quia repertus jam minimus' divisus conferendus est cum proximo. Nam factus ab altero per alterius divisorem maximo communi divisori cognominem, est minimus ab iis divisus, sic minimus ab 8, 6, 4 divisus, est 24. Nam 24 est minimus divisus ab 8 & 6: rursum item minimus divisus est á 24 & á 4, ut é secundo consectario patet. Sic á 3, 4, 8 minimus divisus est 24, quia minimus divisus á 3 & 4 est 12, tum minimus divisus á 12 & 8, est 24. Sic minimus divisus á 2, 3, 4, 5 est 60. hinc sequitur,

43 *Si numerus fuerit minimus divisus á nominibus datarum partium, erit minimus qui habeat datas partes.* 41.p.7.

Ut minimus divisus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ est 12 nẽpe minimus divisus á 2, 3, 4, quique minimus bifariam, trifariã quadrifariam dividi possit. Sic minimus qui habeat $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ est 60. nempe minimus divisus á 2, 3, 4, 5, quiq; in has partes minimus dividi poſſit.

Cap.8, de numeris paribus & imparibus.

Atque hæc de primis & factis numeris, ſecũda abſoluti & ſimplicis numeri diſtributio eſt in numerum parem & imparem.

44. *Par eſt numerus dividuus á binario.6.d.7.*

Sic 2 ipſe par, quia dividitur á ſeipſo ſemel, ſic 4 eſt par, quia dividitur á 2 bis.

45. *Impar eſt numerus individuus á binario.7.d.7.*

Ut 3. itaque.

46. *Impar unitate differt á pari.*

Sic 5, ſic 7, & ſimiles ſunt impares numeri, quibus unitate ſubducta, pares erunt 4,6.

Par eſt pariter par tantúm, pariter impar tantúm, pariter par ſimul, & pariter impar.

47. *Pariter par eſt numerus tantúm dividuus á pari per parem.8.d.7.*

Ut 8 pariter par eſt, quem 2 par dividit per 4 parem.

48. *Si numeri fuerint ab unitate continué duplicati, quilibet erit pariter par. 32.p.9.*

Ut

Ut 1, 2, 4, 8, 16, 33, 64.

49. *Pariter impar eſt numerus tantũ dividuus á pari per imparem.9.d.7.*

Ut 6, quem 2 par dividit per 3 imparem.

50. *Si numerus habuerit dimidium imparem, erit pariter impar tantúm.33.p.9.*

Ut 6, 10, 18, quia horum dimidia pars eſt impar, nempe 3, 5, 9.

51. *Pariter par ſimul & pariter impar, eſt numerus neque ab unitate duplicatus, neque dimidium habẽs imparem.34.p.9.*

Ut ſunt 12, 20, 28: quia neque duplicati ſunt ab unitate, ut 2, 4, 8, 16, neque dimidium habent imparem, cúm dimidii ipſorum 6, 10, 14, ſint etiam pares. Impar eſt impar ſimpliciter vel impariter.

52. *Impar ſimpliciter, eſt numerus dividuus tantúm ab unitate per ſeipſum.*

Ut 3, 5, 7, & quilibet primus.

53. *Impariter autem impar eſt numerus dividus ab impari per imparẽ.10.d.7.*

Ut 15 impar dividitur in 3 imparem, ſecundum 5 imparem.

Itaque omnis impar impariter, eſt factus numerus.

Cap.9.de numero perfecto & imperfecto.

Additur ad duas simplices numeri distributiones tertia distributio in numerum perfectum & imperfectum.

54. *Perfectus numerus, est numerus partium toti æqualium.22.d.7.*

Ut senarii partes sunt 1, 2, 3, quæ additæ sunt æquales toti 6. Et hic unitas numerus est. Nam si pars, est etiam numerus numeri.

55. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus sit primus, & ab eo totidem continué duplicentur, quot anté fuerant, ultimus erit perfectus, reliqui partes perfecti.36.p.9.*

Ut hic,

1 2 | 3 6.

Adde 1 & 2, totus 3 est primus, & secundus ab eo continué duplicatus est 6 perfectus, cujus omnes partes sunt, 1, 2, 3, & solus est perfectus intra 10. Secundó, ut hic,

1 2 4 | 7 14 28.

Adde 1, 2, 4, sunt 7, & tertius ab eo continué duplicatus 28 est perfectus, eiusque partes omnes 1, 2, 4, 7, 14, & solus hic est perfectus á 10 ad 110. Tertió, ut hic,

1, 2, 4, 8, 16. | 31, 62, 124, 248, 496.

Adde

Adde 1, 2, 4, 8, totus est 15 compositus, prætereatur igitur. At 1, 2, 4, 8, 16 additis, totus est 31, primus, & quintus ab eo duplicatus 496 perfectus, eiusque partes omnes sunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496, solus hic perfectus est á 100 ad 1000, & sic deinceps. Itaque ut perfectus solus neglectis partibus habeatur, hinc factū est ab Euclide theorema in hanc sententiam:

56. *Si é numeris continué duplicatis ab unitate totus sit primus, factus ab eo per ultimum erit perfectus.*

Sic deinceps á 1000 ad 10000 perfectus est 8128, rarique admodum sunt hi numeri, imó nonnullis gradibus nulli sunt, ut sexto, undecimo, decimoseptimo, & plerisque aliis. Sic igitur perfectus efficitur é pariter paribus & ex imparibus primis, id est, ex maximé dividuis & minimé dividuis.

57. *Imperfectus numerus, est numerus partium toti inæqualium.*

Estque redundans aut diminutus.

58. *Redundans, est numerus imperfectus partium toto majorum.*

Ut 12, cujus partes 1, 2, 3, 4, 6 collectæ, sunt 16 majores toto 12.

59. *Diminutus, est numerus imperfe-*

ctus partium toto minorum.

Ut 4, 8, & quilibet pariter par.

ARITHMETICÆ
LIBER II.

Cap. 1. de primis differentiis comparationis.

PRIMA pars Arithmeticæ adhuc fuit, secũda sequitur.

1. *Arithmeticæ pars secunda est, quæ interpretatur numerorum comparationes, comparationumque genera & proprietates.*

2 *Comparatio numerorum est habitudo quædam ipsorum inter se.*

Comparatio est ratio vel proportio.

3. *Ratio est comparatio quantitatis.* 3.*d*.5.

Rationis termini duo sunt, primus antecedens & dux, secundus consequens & comes appellatur. Quantitas autem æqualis est vel inæqualis, unde sunt axiomata sequentia.

4. *Si duo numeri fuerint æquales ei-*

dem,

dem erunt æquales inter se.

Ut 2 & 2 sunt æquales eidem 2. Itaque sunt æquales inter se.

5. *Si numeri æquales addantur æqualibus, toti erunt æquales. 2. axio.*

Ut 2 & 2 sunt æquales numeri, adde utrique 3, toti erunt 5 & 5: item æquales inter se.

6 *Si æquales subducantur ab æqualibus, reliqui erunt æquales. 3. axio.*

Ut 5 & 5 sunt æquales numeri: ab utroque tolle 3, manebunt 2 & 2: item æquales inter se.

7. *Totus numerus major est sua parte. 9. ax. 1.*

8. *Si æquales addantur inæqualibus, toti erunt inæquales. 4. axio.*

Ut 4 & 3 sunt inæquales numeri, adde utrique 2, toti 5 & 6 sunt item inæquales.

9. *Si æquales subducantur ab inæqualibus, reliqui erunt inæquales. 5. ax.*

Ut 6 & 5 sunt inæquales numeri, tolle ab utroq; 2 & 2 æquales numeros, reliqui quatuor & 3 erunt item inæquales. Ratio est arithmetica vel geometrica.

10. *Ratio arithmetica, est comparatio*

in quantitate, qua numerus differt á numero.

Ut ratio arithmetica 2 cum 2 est æqualitatis, 2 cum 3 est differentia. 1, 2 cum 5 est differentia 3. Ideoque hæc ratio differentia dicitur.

Cap. 2. de numeratione rationum.

11 *Ratio geometrica est comparatio in quantitate, qua numerus est divisus in numerum.*

Hic præcipué ratio dicitur: dum veró rationis termini scribũtur, dux superné, comes inferné notatur sic,

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & \end{matrix}$$

12 *Datis rationis terminis, genus divisione, datoque genere rationis, termini multiplicatione inveniuntur.*

Sic datis terminis 1 ad 1, 2 ad 2, ratio erit æqualitatis, quia æqualis æqualem semel dividit. Datis 4 ad 2, 6 ad 4, ratio erit inæqualitatis, illic dupla, hic sexquialtera, quia comes illic ducem bis, hic semel dividit, & dimidium superest. Dederis contra genus rationis, nempe ex illis quotis (1 (2 (1 $\frac{1}{2}$. Si numerus sit integer, habebis ducem,

ducem, cui 1 pro comite ſubjicies, ſin fractus ſit, multiplicabis integrum per nomen, factoque numerum partium ſimul addes, conſtitues ducem: comes autem ipſe in numero permanet, ut in poſtremo exemplo: multiplica 1 per 2, & facto 2 adde 1, conſtitues 3 pro duce, rationiſque termini erunt $\frac{3}{2}$.

13. *Rationum communis numeratio eſt tanquam terminorum, ideoque eadem eſt quæ partium, atque ideó ſi comites ſint iidem, ſoli duces ſpectantur, excepta multiplicatione, quæ tum duces, tum comites multiplicat.*

Sic è ratione dupla 4 ad 2 addita ad rationẽ triplam 6 ad 2, tota ratio eſt quintupla 10 ad 2. Sic ratione dupla 4 ad 2 ſubducta á ratione quintupla 10 ad 2, reliqua eſt ratio tripla 6 ad 2, exempla ita ſunt,

4	6	10	item	4	10	6
2	2	2		2	2	2

Sic ratio dupla 4 ad 2 multiplicans rationem triplam 6 ad 2, faciet rationẽ ſextuplam 24 ad 4. Sic ratio tripla 9 ad 3 multiplicata per rationem quadruplam 8 ad 2, faciet rationem duodecuplam 72 ad 6. Exempla ita ſunt.

$$\frac{4}{2}\ \ \frac{6}{2}\ \Big|\ \frac{24}{4}\ \Big|\ \text{item}\ \ \frac{9}{3}\ \ \frac{8}{2}\ \Big|\ \frac{72}{6}$$

Divide rationem duodecuplam 12 ad 1, in rationem triplam 3 ad 1, quotus erit 4, qui significat dividentem rationem quater in dividenda contineri, aut rationem quadruplam 4 ad 1 pro quota ratione inveniri: sic ratio sedecupla 32 ad 2 divisa in rationem quadruplam 8 ad 2, relinquit quotam rationem quadruplam. Denique quotus hic est nomen quotæ rationis. Exempla ita sunt,

$$\frac{3}{1}\ \ \frac{12}{1}\ \Big|\ \frac{4}{1}\ \Big|\ \text{item}\ \ \frac{8}{2}\ \ \frac{12}{2}\ \Big|\ \frac{4}{1}$$

14 *Si comites sint diversi, opus erit reductione, de qua suo loco.*

Ergo hæc numeratio communis est in additione, subductione, multiplicatione, divisione.

15 *Ratio inæqualitais reducitur ad rationem æqualitatis multiplicatione suæ conversæ.*

Ut ratio $\frac{2}{3}$ multiplicetur per rationem $\frac{3}{2}$, fiet ratio $\frac{6}{6}$, quæ est æqualitatis.

Cap. 3. de generibus rationis.

Ratio prima est aut conjuncta, prima multiplex

plex aut ſuperparticularis aut ſuperpartiens.

16 *Multiplex eſt, quando terminus major dividitur á minore.5.d.7.*

Sic omnis numerus multiplex eſt ad unitatẽ, ut 2 duplus, 3 triplus, 4 quadruplus, & ſic in infinitum. Sunt enim generis hujus reliquorumque ſpecies infinitæ. Atque hic antecedens eſt multiplex, ut duplus, triplus, quadruplus, quintuplus, ſextuplus. Cōſequens autem ſubmultiplex, ut ſubduplus, ſubtriplus, ſubquadrupl⁹, ſubquintuplus, ſubſextuplus. Hic etiam unitas numerus eſt, ſicuti ſæpe in tota comparationum doctrina. Species veró ſic notãtur,

2	3	4	5	6
1	1	1	1	1
dupla,	tripla,	quadrupla,	quintupla,	ſextupla.

Si ſubmultiplex multiplici contra comparetur, minoris inæqualitatis erit ratio, & ſubmultiplex dicetur, & antecedens minor erit, cōſequens major, ut in cœteris deinceps. Nomen ſiquidem rationis in minore qualibet inæqualitate, ſemper á majore termino capitur, addito, ſub: ſic igitur ſubmultiplicis ſpecies notantur,

1	1	1	1
2	3	4	5
Subdupla,	ſubtripla,	ſubquadrupla,	ſubquintupla

1
6
ſubſextupla.

Hæc prima inæqualitatis ratio, vera & propria divisione percipitur, reliquæ autem species imperfecta divisione cognoscũtur, perpetuoque pars aut partes relinquuntur.

17. *Superparticularis est, quando major dividitur semel á minore, & pars ejus superest.*

Si altera, sesquialtera dicitur, si tertia, sesquitertia, si quarta, sesquiquarta, si quinta, sexquiquinta, si sexta, sexquisexta, ut in subjectis exẽplis patet.

$\frac{3}{2}$ Sexquialtera, $\frac{4}{3}$ sesquitertia, $\frac{5}{4}$ sesquiquarta, $\frac{6}{5}$ sesquiquinta.

$\frac{7}{6}$ Sesquisexta.

Ac si majores minoribus dividas, quoti speciem rationis & nomen subtiliús explicabunt, ut hic vides,

$1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{6}$.

Si minor majori in hac specie comparetur, ratio subsuperparticularis dicetur: res sic erit,

$\frac{2}{3}$ Subsesquialtera, $\frac{3}{4}$ Subsesquitertia.

$\frac{4}{5}$ Subsesquiquarta, $\frac{5}{6}$ Subsesquiquinta.

$\frac{6}{7}$ Subsesquisexta.

Ubi

Ubi quoti ſunt prioribus ſimiles.

18. *Superpartiens eſt, quando major dividitur ſemel á minore, & ejus partes aliquot ſuperſunt.*

Si duæ, ſuperbipartiens, ſi tres, ſupertripartiẽs, ſi quatuor, ſuperquadripartiẽs, ſi quinque, ſuperquintupartiens, ſi ſex, ſuperſextupartiens, & addimus præterea nomen partis á comite, tertias, quartas, quintas, ſextas, ſeptimas, ſi comes ſit 3, 4, 5, 6, 7. Itaque nomen ſpeciale duplex hic erit, alterum é numero, alterum é nomine partium, ut,

5	7	9
3	4	5
Superbipart. tert.	Supertripart. quart.	Superquadripar. quint.
11		13
6		7
Superquintupart. ſext.		Superſextupart. ſept.

Quorum quoti ſpeciem indicantes ſunt, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{5}$, $1\frac{5}{6}$, $1\frac{6}{7}$. Si cõparetur in hoc tertio genere minor majori, ſuperbipartiens dicitur, & contrario modo notatur, ut,

3	4
5	7
Subſuperbipart. tert.	Subſupertripart. quart.

5	6
9	11
Subſuperquadripart. quint.	Subperquintupart. ſext.

7
13
Subſuperſeptupart.
ſeptimas.

Conjuncta ratio eſt multiplex ſuperparticularis, aut multiplex ſuperpartiens.

19 *Multiplex ſuperparticularis eſt, quãdo major ſæpiús dividitur á minore, & ejus pars ſupereſt.*

Ut,

5	7
2	3
Dupla ſeſquialtera.	Duplaſeſquitertia,

9
4
Duplaſeſquiquarta.

Et ſic deinceps, ut, 11 ad 5, duplaſeſquiquinta, 13 ad 6, dupla ſeſquiſexta, quarum quoti ſunt,

$2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5}$, $2\frac{1}{6}$

Sic tripla ſuperparticularis.

7	10	13	16	19	22	25
2	3	4	5	6	7	8

Rationum quoti ſunt.

$3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{4}$, | $3\frac{1}{5}$, $3\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{1}{8}$.

At

At ſi contrá minor majori comparetur (ſub) utrique ſpeciali nomini præponendum: ut ratio $\frac{2}{5}$ eſt ſubdupla, ſubſeſquialtera, ratio $\frac{3}{7}$ eſt ſubdupla, ſubſeſquitertia, &c.

20. *Multiplex ſuperpartiens eſt, quãdo major ſæpiús dividitur á minore, & ejus partes ſuperſunt.*

Ut,

8 3 Duplaſuperbipart. tert.	12 5 Duplaſuperbipar. quint.
16 7 Duplaſuperbipart. ſept.	20 9 Duplaſuperbipart. non.

24
11
Duplaſuperbipart.
undec.

Quoti rationum.

$2\frac{2}{3}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{2}{9}$, $2\frac{2}{11}$.

Cap. 4. de primis differentiis proportionis.

Ratio adhuc fuit, ſequitur proportio.

21 *Portio eſt ſimilitudo rationum.*

Ejusque perinde valet inversio & alternatio.

22. *Proportionis inversio, est assumptio consequentis, velut antecedentis ad antecedentem velut consequētem.* 13.*d*.5.

Ut si dixeris, ut sunt 2 ad 4, sic 3 ad 6: Ergo, inquam, ut 3 ad 6, sic 2 ad 4: item ut 6 ad 3, sic 4 ad 2. Denique ut 4 ad 2. sic 6 ad 3, id ἀνάπαλιν est Euclidi.

23. *Proportionis alternatio est assumptio antecedentis ad antecedentem, & cōsequentis ad consequentem.* 11. *&* 12.*d*.5.

Ut si dixeris, ut 5 ad 10, sic 4 ad 8: ergo, inquam, ut 5 ad 4, sic 10 ad 8. Id ἐναλλὰξ est Euclidi.

Proportio est disjuncta vel continua.

24 *Proportio disjuncta, est proportio terminorum disjunctorum.*

Ut 6 ad 12, sic 7 ad 14. hic termini quatuor sunt diversi.

25. *Proportio continua, est proportio ejusdem termini secundi & tertii.*

Ut 2 ad 4, sic 4 ad 8: hic duæ rationes uno termino continuantur.

Cap. 5. de proportione arithmetica disjuncta.

Proportio est arithmetica aut geometrica.

Propor-

26. *Proportio arithmetica, est similitudo differentiarum.*

Ut in 8, 6, 12, 10, utrobique enim est 2, pro differentia etiam inverso modo: ut enim 10 ad 12, sic 6 ad 8, vel ut 12 ad 10, sic 8 ad 6: una enim differentia 2 est. Item alterno modo, ut 8 ad 6, sic 12 ad 10. Ergo ut 8 ad 12, sic 6 ad 10. Proportionis arithmeticæ inventio varia est, prima est additionis.

27. *Si quatuor numeri sint arithmeticé proportionales, extremus simul uterque erit æqualis medio simul utrique.*

Ut in 2, 3, 4, 5: utrobique enim est 7. Sic in 12, 10, 6, 4: utrobique enim est 16. Secunda est multiplicationis.

28. *Si sint quatuor numeri arithmeticé proportionales, factus á mediis superabit factum ab extremis, facto á differentia maximi á medio, per differentiam ejusdem medii á minimo.*

Ut in 12, 10, 8, 6, factus ab extremis est 72, quem 80 factus á medio, superat 8, facto á 2, differentia primi supra medium, per 4 differentiam eiusdem medii á minimo. Sic in 12, 10, 4, 2, factus ab extremis est 24, quem 40, factus á mediis superat 16, facto á 2 differentia primi á medio, per 8 differẽtiam eiusdem medii á minimo. Termini tamen recté constituẽdi, ut medii sint medii quantitate. Neque hîc dices ut 12 ad 8, sic 16 ad 12, sed vt 8 ad 12, sic 12 ad 16.

Cap. 6. de proportione arithmetica continua, ejusque progressione.

E disjuncta proportione Arithmetica, affectio continué deducitur.

28. *Si sint tres numeri arithmeticé proportionales, medius erit dimidius extremi simulutriusque.*

Ut in 3, 5, 7. Nam 3 & 7 sunt 10, quorum dimidius est 5. Hinc patet inventio medii arithmetici.

30. *Si sint tres numeri arithmeticé proportionales, factus á medio, superabit factum ab extremis facto á differentiis.*

Ut in 3, 6, 9, factus ab extremis est 27, quem 36 factus á medio, superat 9 facto á differentiis 3 & 3.

31. *Proportionis arithmeticæ continuæ termini quantumlibet continuari possunt, & progressio arithmetica vulgó dicitur.*

In ea quæri solet terminorum differentia, numerus,

merus,primus,ultimus & summa, quæ datis tribus inveniuntur.

32. *Si primus fuerit subductus ab ultimo, reliquusque divisus in numerũ terminorum unitate minutum, quotus erit differentia.*

Ut progressionis quinque terminos habentis sunto primus & ultimus terminus 2 & 10,numerus autem terminorum 5,tolle igitur 2 primum á 10 ultimo,restant 8,quibus in quatuor numerum terminorum unitate minutum divisis, quotus erit 2 pro differentia, per quam á 2 primo termino invenies reliquos terminos 4, 6, 8, usque ad 10 ultimum,totaque progressio erit 2, 4, 6, 8,10.

33. *Si primus fuerit subductus ab ultimo,reliquusque divisus in differentiam, quotus unitate auctus, erit numerus terminorum.*

Ut in eodem exemplo,tolle 2 á 10,manent 8, quibus divisis in 2 differentiam,quotus est 4,cui adde 1,habes 5 numerum terminorum.

34. *Si unitas fuerit subducta á numero terminorum, factusque á reliquo per differẽtiam subductus ab ultimo,reliquus erit primus.*

Ut in eodem exemplo, tolle 1 á 5 numero terminorum, & 4 reliquum multiplica per 2 differentiam, & factum 8 tolle á 10 ultimo, reliquus 2 eſt primus.

35. *Si unitas fuerit ſubducta á numero terminorum, factuſque á reliquo per differentiã additus primo, totus erit ultimus.*

Ut in progreſſione, 2, 4, 6, 8. 10, numerus terminorum eſt 5, á quo tollatur 1, & per 4 numerũ terminorum unitate minutum, multiplica per 2 differentiam, & 8 facto adde 2 primum terminũ, totus erit 10 ultimus terminus progreſſionis.

36. *Si numerus fuerit factus ex additis extremis per dimidium numeri terminorum, vel á numero terminorum per dimidium additorum extremorum, erit ſumma progreſſionis.*

Ut in 2, 4, 6, 8, 10, 12, extremis additis 2 & 12, totus 14 per 3 dimidium multiplicatus, facit 42 ſummam quæſitam. Fac numerum terminorum imparem, ut in 2, 4, 6, 8, 10, extremis additis totus eſt 12, cujus dimidius 6 per 5 numerum terminorum multiplicatus, facit 30 ſummam.

Cap. 7. de proportione geometrica, deque invẽtione proportionalium & inæqualiũ.

Ad-

Adhuc proportio arithmetica fuit, geometrica sequitur.

37. *Proportio geometrica est similitudo rationum. 4.d.5.*

Hic proprié proportio dicitur.

38. *Proportionales sunt, qui habent eandem rationem. 7.d.5.*

Veluti 9 ad 3, sicuti 12 ad 4, ratio utrobique est tripla, ideoque 9, 3, 12, 4, sunt proportionales.

39. *Si numeri fuerint æquales, erunt proportionales ad eundem, & idem erit proportionalis ad æquales. 7.p.5.*

40. *Et si numeri fuerint proportionales ad eundem, erunt æquales, & ad quos idem fuerit proportionalis, & illi erunt æquales. 9.p.5.*

Ut 2 & 2 sunt proportionales ad 3: ut enim 2 ad 3, sic 2 ad 3. itemque 3 ad 2, & 2 est proportionalis: ut enim 3 ad 2, sic 3 ad 2, contraque 2 & 2 cúm sint proportionales ad 3, sunt æquales. Itē 2 & 2 æquales, ad quos 3 est proportionalis.

41. *Si duo numeri fuerint inæquales, major habebit ad eundem majorem rationem, quám minor, & idem ad minorem*

habebit majorem rationem quám ad majorem. 8.*p*.5.

42. *Et si duo numeri habuerint ad eũdem rationem inæqualem, qui habuerit majorem, erit major, ad quẽ autem idem habuerit majorem rationem, erit minor.* 20.*p*.5.

Ut 3 & 4 ſunt inæquales, & 4 ad 2 majorem rationem habet, nempe duplam, quám 3 ad eundem, nempe ſeſquialteram: item 2 ad 3 majorem habet rationem, nempe ſeſquialteram, quám ad 4 ſubduplam. Conuerſum patet in eodem exemplo,

Cap. 8. de inventione proportionalium per multiplicationem, deq; reductione partium ad cognomines & proportionales.

43. *Minores æqué majoribus ſunt proportionales.* 15.*p*.5.

Ut 2 ad 4, ſic 3 ad 6. Antecedentes enim dimidii ſunt conſequentium: datis autem minoribus, majores proportionales inveniuntur multiplicatione.

44. *Si numerus numeros multiplicet,*

facti

facti erunt proportionales multiplicantibus.18.p.7.

Ut 2 multiplicet 3 & 4, facti erunt 6 & 8 proportionales multiplicatis 3 & 4. Item 3 & 4 multiplicent 2, facti iidem 6 & 8 erunt itidem proportionales multiplicantibus, 3 & 4, quia utrobique æqué majores sunt minoribus,

Reductio partium ad cognomines & proportionales é proximo multiplicationis theoremate deducitur, atq; ut proportionales ipsi addantur, subducantur, dividantur necessaria. Proportionales enim partes sunt eædem quãtumlibet terminis dissimiles, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$.

46. *Partium reductio ad cognomines & proportionales partes, est multiplicatio nominis & numeri per alterũ nomen.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplica 2 & 3 per 4, item 3 & 4 per 3, facies cognomines & proportionales partes $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ proportionales quidem, quia numerus idem duos multiplicavit: cognomines veró & æqualium nominum, quia sunt é duobus numeris inter se multiplicatis.

47. *Nomina reductione eadem facta, ad divisionem nihil attinent.*

Nam cúm reduxeris partes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ad $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, dicere $\frac{8}{12}$ toties é $\frac{9}{12}$ subduci nihilo plus est quám dicere 8 toties á 9. Itaque nominum inter ſe multiplicatio hic in diviſione omittitur. At ſi ſeries reducendarũ partium longior fuerit, binæ reducẽdæ ſunt, ut in $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$, prima reductione atque hinc additione facta, habebis $\frac{17}{12}$: deinde cum $\frac{4}{5}$ reductæ ſunt $\frac{85}{90}$, $\frac{48}{60}$.

48. Eadem via reductionis, cognoſcetur é binis partibus utræ ſint majores.

Ut $\frac{5}{6}$ ſunt majores quám $\frac{3}{4}$, quia facta reductione habebis $\frac{20}{24}$ pro $\frac{5}{6}$: At habebis tantúm $\frac{18}{24}$ pro $\frac{3}{4}$.

49. *Eadem via termini rationum fracti ad integros proportionales redeunt, ſi numeri multiplicẽtur per nomen unarum partium.*

Sic $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ multiplicatæ per 4, redeunt ad $\frac{8}{4}$, $\frac{12}{6}$, id eſt ad 2 & 2 integros, & eãdem rationem habentes quam habent $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{6}$. Si majores terminos proportionales requiras, multiplica rurſus $\frac{8}{4}$ & $\frac{12}{6}$ per nomen 4, facies $\frac{32}{4}$ & $\frac{48}{6}$, id eſt, 8 & 8, vel multiplica per 6, facies $\frac{48}{4}$ $\frac{72}{6}$, id eſt 12 & 12 integros proportionales datis fractis $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$.

Idem erit, ſi cum integris fracti miſceantur, ut ſi pro $3\frac{1}{3}$ & $4\frac{1}{3}$ quærantur integri proportionales, multiplicabis $3\frac{1}{2}$ per 2, facies 7: deinde multiplicabis $4\frac{1}{3}$ per idem nomen, facies $8\frac{2}{3}$, neque dum habes ambos integros, ſed alterum tantúm, Eadem itaque via quæratur alter: igitur

per

per reliquum nomen 3, multiplica 8 $\frac{2}{3}$, facies 24 & $\frac{6}{3}$, unde colliges 26, tandemque habebis 21 & 26 integros proportionales 3 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{3}$.

Cap. 9. de inventione proportionalium per divisionem, deque reductione ad minimos.

Datis veró majoribus numeris, minores inveniũtur regula divisionis per contrariam é lege multiplicationis deducta.

50. *Si numerus diviserit numeros, quoti erunt proportionales divisis.*

Ut 2 dividat 8 & 6, quoti 4 & 3, erunt proportionales divisis 8 & 6: At 4 & 3 dividant 24, quoti 6 & 8, erunt proportionales divisis, sed contrario genere inæqualitatis. Non enim ut 4 ad 3, sic 6 ad 8, illic enim est ratio sesquitertia, hic sesquialtera, sed ut 4 ad 3, sic 8 ad 6. proportionales fiunt divisione non solúm minores divisis, sed minimi proportionalium.

51. *Si numeri fuerint minimi proportionalium, erunt primi inter se.* 23.p.7.

52. *Et si fuerint primi inter se, erunt minimi proportionalium.* 24.p.7.

Ut 3 & 2 sunt primi & minimi sesquialterorum, & quia sunt minimi proportionalium, iccircó ſunt primi.

53. *Si maximus communis diviſor diviſerit datos, quoti erunt minimi proportionales datis.* 35.*p*.7.

Ut hic,

$$\begin{array}{ccc} & 8 & 12 \\ 4) & & \\ & 2 & 3 \end{array}$$

4 maximus diviſor cúm diviſerit 8 & 12, quoti 2 & 3 erũt proportionales minimi, unde etiam ſequitur.

54. *Si duo numeri fuerint minimi proportionalium, divident ſibi proportionales æqualiter, major majorem, & minor minorem.* 21.*p*.7.

Ut patet in eodem exemplo: 3 dividit ipſum 12 quater, & 2 dividit ipſum 8 toties. Habet autem iſta ad minimos reductio uſum tam neceſſarium, quám eſt facile pares numeros præ magnis numerare. Itaque providendum ſemper eſt, ut primi numeri & minimi perpetuó proponantur, aut ſi compoſiti dati ſint, protinús reducantur ad minimos per maximum communem diviſorem. Serviet etiam ſuperiori proportionalium reductioni reductio ad minimos terminos, ut poſtea reductorum terminorũ alia reductio prolixior evitetur. Sed reductio iſta per ſpecies numerationis eſt etia quædam ſpecialis

55. *In additione & ſubductione minimus á nominibus diviſus eſt aſſumendus pro communi nomine & numeri multiplicandi alterné per partes cognomines.*

Ut hic vides,

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{6} & & \underbrace{4} \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{4}{9} \\ \frac{}{1} & & \frac{}{3} \\ & \overbrace{9} & \end{array}$$

ubi pro $\frac{2}{3}$, & $\frac{4}{9}$ habes $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$.

56 *In multiplicatione numerus & nomen alterius reducuntur.*

Quia ſunt multiplicatores, idemque eſt multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{5}{6}$, & $\frac{2}{6}$ per $\frac{5}{3}$. Itaque tanquam $\frac{2}{6}$ rediges ad $\frac{1}{3}$, & pro $\frac{10}{18}$, facies $\frac{5}{9}$.

In additione & ſubductione minimus a nominib[us] diviſus

57. *Si numerus nomini alterno fuerit æqualis, reliquus numerus reliquo nomini ſuperpoſitus multiplicationem abſolvit.*

Ut in $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ omiſſis 3 & 3, habes $\frac{2}{4}$, id eſt, $\frac{1}{2}$. Quin ſi longa hic ſeries fuerit, æqualibus omnibus omiſſis, reliquus numerus cum reliquo nomine multiplicationem abſolvet, ut hic,

$\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, eſt $\frac{1}{9}$.

58. *In diviſione numeri inter ſe, vel nomina inter ſe, vel utraque ſeparatim re-*

ducuntur.

Ut ſi $\frac{4}{5}$ dividantur per $\frac{2}{3}$, pro 2 & 4, ſumes 1 & 2, & quota pars erit $\frac{6}{5}$, vel $1\frac{1}{5}$. Item ſi dividas $\frac{5}{6}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes 2 & 3 pro 9 & 6, & facies $\frac{15}{8}$, vel $1\frac{7}{8}$. Item ſi $\frac{8}{27}$ per $\frac{4}{9}$, ſumes & 2 pro 4, & 8 pro 9 & 27, 1 & 3, & quota pars erit $\frac{2}{3}$.

Cap. 10. de regula aurea proportionis diſjunctæ, & inde quarti proportionalis inventione.

Proportio eſt prima aut conjuncta.

59. *Proportio prima, eſt proportio diſjuncta tantúm, aut continua tantúm.*

60. *Proportio diſjuncta eſt, quando quæ ratio eſt primi termini ad ſecundum, eadem eſt tertii ad quartum.*

Ad proportionem diſjunctam prima erit inventio quarti proportionalis per multiplicationem ſimul & diviſionem, quæ inventio propter ſingularem excellentiam vulgó aurea regula nominatur.

61. *Si quatuor numeri ſint proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á mediis: & ſi factus ab extremis ſit æqualis facto á mediis, quatuor numeri erunt*

runt proportionales. 19.*p*.7.

Ut in 4, 2, 6, 3, factus 12 ab extremis 4 & 3, est æqualis 12 facto á mediis 2 & 6. Ideoque etiam numeri quatuor positi sunt proportionales. Hinc sequitur.

62. *Si datis tribus numeris primus diviserit factum á secundo & tertio, quotus erit quartus proportionalis.* 19.*p*.9.

Ut in 2, 4, 6, quartus proportionalis est 12.

63. *In hujus regulæ quæstionibus præcipué spectandus est ordo terminorum.*

Ut nempe primus primo loco sit, & cœteri suo. Itaque si confusiús, ut solet, quæratur, redigantur tamen in ordinem termini: Ut, quot horæ sunt in 6 diebus, cúm in 3 sint 72? Hic quæstio est tertii termini, quæstionisque proportio sic expedietur 3, 72, 6, 144.

64. *Si confundantur res heterogeneæ, reducendæ sunt priús ad idem genus.*

Ut si quæratur, hebdomada horas habet 168, dies 4 quot horas habent? Pro hebdomada ponantur 7 dies, & tum dic, 7 dies dant horas 168, 4 dies, quot horas dabunt? reperies 96.

65. *Si termini rationis comprehendantur dato nomine rationis, anté sunt explicandi.*

Ut ad quem numerum 12 eſt quintuplus? Pone pro primo & ſecundo termino terminos minimos quæſitæ rationis 5 & 1, & dicito, ut 5 ad 1, ſic 12 ad $2\frac{2}{5}$. Atque hoc modo cuilibet termino terminus rationalis, qua voles rationis ſpecie reperietur. Sic enim idem 12 ſeſquiquartus erit ad $9\frac{3}{5}$ ſuperbipartiens tertias, ad $7\frac{1}{5}$ duplus ſeſquiquartus, ad $5\frac{3}{9}$, id eſt, $\frac{1}{3}$, duplus ſupertripartiens quintas ad $4\frac{8}{13}$. Exempla ſunt cum ſpecie rationum terminos includente: ſic,

5, 1	5,	1,	12,	$2\frac{2}{5}$
$1\frac{1}{4}$,	5,	4,	12,	$9\frac{3}{5}$
$1\frac{2}{3}$,	5,	3,	12,	$7\frac{1}{5}$
$2\frac{1}{4}$,	9,	4,	12,	$5\frac{3}{9}$, id eſt $\frac{1}{3}$
$2\frac{3}{5}$,	13,	5,	12,	$4\frac{8}{13}$.

66. *Si quid anteceſſerit quæſtionem, anté explicandum eſt.*

Centum libras emi 10 aureis, vendidi 12, quãtum lucri fuiſſet ex aureis 100? Primó videbis lucrum 10 aureorum eſſe aureos 2. Tum igitur per auream regulam dicito: 10 dant 2, ergo 100 dabunt 20. Item ſi libra 3 aureis empta, venderetur tantum 2, quanta eſſet jactura ex aureis 100? Hic cúm videris jacturam in 3 eſſe 1, tum dices 3 perdunt 1: ergo 100 perdunt $33\frac{1}{3}$. Sic ſæpe multarum rerum additio facienda, priuſquam proportio concludatur: ut, piperis pondo 1000 in Luſitania empta ſunt nummis 10000, proque his

his vectigal pensitatũ nummis 1000, naulum per Rhotomagum usque fuerit 300. Ibi deinde vectigal 500, vectura 200: accesserit ministrorum impensa 2000, vis in singulas libras lucrari 4, id est, pro tota summa 4000? Adde illa omnia, summa erit 18000. Iam dicito, 1000 pondo dant impensas 18000: ergo 1 dat 18.

Putearius quidam puteum brachiorum 34 redemit effodiendum libris 60 cum victu geminarum operarum. Effossis autem brachiis 20, ægrotare cœpit, patremque familias mercedẽ debitam rogavit, quanta igitur ea est? Hic victus nihil variat, sed arithmeticæ progressionis usus hic est anté proportionis geometricæ conclusionem. Nam secundum brachium, laborem primi continet & tertium utriusque, & sic deinceps arithmetica gradatione labor crescit. Itaque summa integræ progressionis brachiorum est 595. At summa progressionis 34, 20 brachiorũ est 210. Jam ad proportionem conclude, ut 595 ad 60, sic 210 ad 21 $\frac{105}{595}$, vel $\frac{3}{17}$.

Cap. 11. de reductione quadruplici ex inventione quarti proportionalis.

Ex aureæ regulæ consectario quadruplex reductio oritur partium ad datum nomẽ, integrorum ad partes, partium ad integros, particularium ad partes.

67. *Reductio partium ad datum nomen, est multiplicatio reducendi numeri per datum nomen, & facti divisio per reducendum nomen.*

Atque hic integra proportio est: ut si quæratur $\frac{3}{4}$ quot sunt $\frac{\ }{12}$? Hic enim terminos tres habes 4, 3, 12, unde quarto proportionali invẽto, respondebis $\frac{3}{4}$ esse $\frac{9}{12}$. Idem veró est dicere, $\frac{3}{4}$ reductæ ad $\frac{\ }{12}$, sunt $\frac{9}{12}$, item quærere, quot sunt $\frac{\ }{12}$ in $\frac{3}{4}$? Reliquæ reductiones compẽdium proportionis habent. In his enim proportionis terminis aliquis deest. Itaque multiplicatio vel divisio omittitur.

68. *Reductio integrorum ad partes, est multiplicatio integrorum per nomen partium unius integri.*

Ut si reducere velis 12 signa ad gradus, scis gradum esse tricesimam partem signi, multiplicabis igitur 12 per 30, & facies 360. Multiplicatio hic tantúm est, quia primus terminus est 1, quo nihil dividitur. Quæstio autem sic esset é suis terminis: 1 signum continet 30 gradus, 12 signa, quot gradus continent? totaque proportio sic esset 1, 30, 12, 360,

69. *Reductio partium ad integros, est divisio partium per ipsarum nomen.*

Ut

Ut 360 gradus, quot valent ſigna? Scis gradum eſſe $\frac{1}{30}$ ſigni. Itaque divides 360 per 30, & habebis 12. Quæſtio etiam ſic eſſet: 30 gradus valent 1 ſignum, 360 quot valent? tumque proportio concluderetur: 30 gradus valent 1 ſignũ, ergo 360 gradus valent 12 ſigna. Atque hic quia ſecundus terminus eſt 1, quo nihil multiplicatur, diviſio tantúm eſt neceſſaria. Proportio tota ſic eſt 30, 1, 360, 12. Hac igitur utraque reductione, via patet reducẽdi aureos ad aſſes, aſſes ad uncias: contraque uncias ad aſſes, & aſſes ad aureos, & monetæ cujuſcunque genus in partes frangẽdi, parteſque ad totum reducendi.

70. *Reductio particularum ad partes, eſt multiplicatio numerorum inter ſe, & nominum inter ſe.*

Sic $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ redeunt ad $\frac{6}{12}$, id eſt $\frac{1}{2}$, & diviſio hic, ut in reductione integrorum ad partes negligitur, quia 1 eſt primus terminus proportionis, & ꝓportio hic duplex eſt, altera in numeris, altera in nominibus. Tota proportio ſic eſt, 1 $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{6}{12}$: ut enim 1 ad 3, ſic 2 ad 6, item ut 1 ad 4, ſic 3 ad 12. Conſtitutis autem proportionalibus, conſtat factum ab extremis æqualem eſſe facto á mediis, atque ob eandem proportionis cauſſam videri poſſit multiplicatio partium & rationũ nomen & comitem ſimul cum nomine & duce cõplecti: Si ſeries longior fuerit, binæ partes ſunt expediendæ, ut in $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$, primó facies $\frac{6}{12}$, id eſt

$\frac{1}{2}$. Deinde ex $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ facies $\frac{1}{4}$. Idem autem fuerit dicere, $\frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$, & $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}$, vel $\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{2}$ quia idem numeri inter ſe multiplicati creant eoſdem, & per hanc particularem reductionem, cognoſcis quid ſint particulæ, cúm vides quales ſint partes totius. Eodem compendio partes integrorum cognoſcentur, ut $\frac{2}{7}$ trigintaquinque aureorum ſunt $\frac{70}{7}$, id eſt 10 aurei, tanquam quæreretur $\frac{2}{7}\ \frac{35}{1}$.

Cap. 12. de variis quæſtionibus proportionis.

Inſtructis & paratis fractorum numerorum præceptis, proportionis uſus multó expeditior erit, qualem compluribus & clarioribus exemplis lubet illuſtrare.

Perſolveris æris alieni $\frac{1}{3}$: deinde $\frac{1}{4}$, & reſtét 10 aurei, quantum erat totum æs alienum? additæ partes ſunt $\frac{7}{12}$: reliquum igitur eſt $\frac{5}{12}$, unde quæſtionis proportio concluditur.

5 valent 10 aureos: ergo 12 valent 24.

Turris $\frac{1}{3}$ in terra latet, $\frac{1}{4}$ demergitur ſub aqua, reliqua pars 60 cubitis ſupra aquam eminet, quot igitur cubiti in terra? quot in aqua? Partes additæ ſunt $\frac{7}{12}$, reliquum igitur $\frac{5}{12}$ valét 60: unde concludes,

$$5 \text{ valent } 60 \text{: Ergo } \begin{cases} 4 & 48 \\ 3 & 36 \end{cases}$$

Talis

Talis est quæstio duplex græcorum epigrāmatum de statua Palladis.

Pallas ego sum malleata, sed aurum
Juvenum est, donum poëtarum.
Dimidiū quidē auri Charisius, octavam autē
Tespis, & decimam partem posuit Solon.
Sed vicesimā Themison, reliqua veró talenta
Novem, & ars, donum Aristodici.

Adde partes, habebis $\frac{31}{40}$. Itaque reliqua 9 ad cōplendum totum, valent 9 proposita. Hic accidit eundem esse numerum propositum & reliquum, ut aliud quærendum non sit. In proximo res alia est.

Augeam interrogavit magna virtus Alchide
Multitudinem armentorum quærens, ipse veró respondit:
Circa quidem Alphei fluvium, amice, dimidium quidem horum,
Pars autem octava, collem Saturni circūpascuntur.
Duodecima autem secessit Taraxippi ad montem:
Circa veró Elidē divinā, vicesima pascūtur.
Verúm in Archadia tricesimam reliqui,
Reliquos autem videto greges, hic quinquaginta.

Additæ partes sunt $\frac{95}{120}$. Itaque reliqua 25 ad explendum totum valent 50: Ergo 120 valent 240. Pauló dissimiliter solvitur græci item epigrammatis illa quæstio fratrum Zethi & Amphionis matriſque Antiopes.

Ambo quidem nos viginti mnas trahimus
Zethuſq; & germanus: at ſi de meo ſumpſeris
Tertiam & quartam Amphionis.
Sex omnia invenies, matris invenies pōdus.

Primùm ſimul utriuſq; quæſiti numeri, id eſt 20, cape $\frac{1}{4}$, quæ nempe ſit unius & alterius quæſiti $\frac{1}{4}$ communis ea erit 5: 6 autem matris numerus continet hanc communem $\frac{1}{4}$, & præterea unū, id eſt $\frac{1}{12}$ primi quæſiti numeri, ut perſpicies tollendo $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, unde proportio de primo numero quæſito concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet 1: ergo $\frac{12}{12}$, id eſt totus, valet 12.

Hic numerus Zethi, quo de 20 ſublato, manet 8, numerus Amphionis. Nam $\frac{1}{3}$ de 12, item $\frac{1}{4}$ de 8, ſunt 4 & 2, & ſimul uterque 6 numerus Antiopes. Idem verò concludi poteſt, ſumendo primum $\frac{1}{3}$ ejuſdem totius 20, id eſt 6 & $\frac{2}{3}$: 6 enim ſuperatur ab eo $\frac{2}{3}$, id eſt $\frac{1}{12}$ ſecundi quæſiti, cujus $\frac{1}{4}$ quæritur, unde concludetur.

$\frac{1}{12}$ valet $\frac{2}{3}$: ergo 1 valet $\frac{24}{3}$, id eſt 8.

Hic numerus eſt Amphionis, quo de 20 ſublato, reſtat 12 numerus Zethi.

Emiſti dolium vini aureis 8, lucrari vis duos, quanti pintam vendes? Dolium continet pintas 288, aurei octo denariolos 4800, tum proportionem concludito.

288 pinctæ valent 4800 denariolos, ergo
1 pinta valet $16\frac{192}{288}$, id eſt $\frac{2}{3}$.

Commuta 3 aureos in aſſes, quales 1 aureus valet

let 50,item in ſemiſſes,quadrantes,æquali ſingulorum generum numero , quot aſſes , quot ſemiſſes , quot quadrantes dabis ? commuta 3 aureos in aſſes 50: deinde aſſes in minimam propoſitarum monetam,ut in quadrãtes, habebis 600, quales aſſis valet 4,ſemiſſis 2,quadrans 1. Hi valores 4, 2, 1, additi ſunt 7,unde proportio concludetur.

7 continent ſemel ſingula quæſita genera,ergo 600 continẽt octogies quinquagies cū $\frac{5}{7}$.

Eme 4 aureis æquali numero libras piperis, Zingiberis,amygdalarum,ſaccari,quot ẽ ſingulis generibus libras habebis ? Sume pretiū unius libræ in ſingulis generibus,ut libra piperis 16 aſſibus væneat,Zingiberis 18,amygdalarū 2,ſaccari 4.prætiis his additis, totus eſt 40 , tū ſume pro 4 aureis 184 aſſes, & proportionem conclude.

40 aſſes dant 1 libram ſingulorū generum , ergo 184 aſſes dant 4 libras & $\frac{3}{5}$ unius libræ.

Hic ſi multiplices libris ſingulorū generum inventum pretium,reſtitues 184 aſſes . In ſequentibus proportio alia quæſitam antecedit.

Curſor Lutetia Lugdunum 5 diebus pervenit,curſor alius velocior , Lugduno Lutetiam idem iter triduo conficit , quando & ubi inter ſe occurrent ? Præpone proportiones antecedẽtes.

Primus 5 diebus totum iter conficit:
Ergo 1 die conficit $\frac{1}{5}$ itineris.
Secundus 3 diebus conficit iter:
Ergo 1 die conficit $\frac{1}{3}$ itineris. Hæ partes

additæ sunt $\frac{8}{15}$ itineris, unde tota proportio concluditur.

$\frac{8}{15}$ itineris conficiuntur 1 die, ergo totum iter conficitur $\frac{15}{8}$ diei, id est 1 die, & sequentis $\frac{7}{8}$. hoc tempus est concursus, jam dicito,

Primus 5 diebus conficit totum: ergo $\frac{15}{8}$ diei conficiet $\frac{15}{40}$ itineris, id est $\frac{3}{8}$.

Secundus conficit 3 diebus totum : Ergo $\frac{15}{8}$ conficit $\frac{15}{24}$, id est, $\frac{5}{8}$. Locus igitur concursus erit ad $\frac{3}{8}$ itineris á primo confecti, & ad $\frac{5}{8}$ á secũdo confecti.

Cursores 2 Lutetia Romam contendunt, sed primus 20 millia passuum quotidie conficit, secundus 33, primus 6 diebus præcesserit, quando secundus assequetur? Imprimis collige per multiplicationem jam confectum iter, habebis 120 millia, tum sume 13 exuperantiam secũdi, & dic. Secundus cõficit 13 millia uno die supra primũ, idem 120 millia, quot diebus supra eundem conficiet? quæstio sic est,

13, 1, 120, $9\frac{3}{13}$.

Potator quidam solus exhaurit cadum vini 20 diebus : at cúm uná potat uxor, 14 diebus exhaurit : quot igitur diebus uxor sola cadum exhauriet? Maritus 20 diebus exhaurit totum, ergo 14 diebus exhaurit $\frac{14}{20}$ vel $\frac{7}{10}$. Itaque uxor 14 diebus potat reliquũ, id est, $\frac{3}{10}$. Jam dicito, uxor exhaurit 14 diebus $\frac{3}{10}$. Ergo $\frac{10}{10}$, id est totũ: exhaurit 46 diebus & $\frac{2}{3}$ unius diei.

E 4 architectis ædificium totum absolveret omnes primus anno 1, secundus 2, tertius 3, quartus 4. Si omnes simul adhibeantur, quanto tempore absolvent? Secundus 2 annis absolvit totū opus. ergo 1 anno absolvet $\frac{1}{2}$ operis, tertius $\frac{1}{3}$, quartus $\frac{1}{4}$. Adde jam singulorū opus 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, habebis $\frac{25}{12}$, unde concludes: Quatuor architecti absolvunt $\frac{25}{12}$ ædificii 1 anno ergo iidem absolvent $\frac{12}{12}$ vel totum $\frac{12}{25}$ unius anni, id est 5 mensibus, & $\frac{19}{25}$ unius mensis.

E duobus architectis primus absolveret 30 diebus, secundus 40, tertio autē addito 15 diebus absolvunt, quot diebus tertius solus effecisset? Primus 30 diebus absolveret totum: ergo 15 diebus absolvet $\frac{15}{30}$ ædificii, id est $\frac{1}{2}$, secundus $\frac{15}{40}$, id est $\frac{3}{8}$, quæ additæ sunt $\frac{7}{8}$. Itaque tertius effecisset $\frac{1}{8}$ illis 15 diebus. Jam denique dicito: $\frac{1}{8}$ conficitur 15 diebus: ergo $\frac{8}{8}$, id est totum, efficitur 120 diebus.

Item, Unius moletrinæ tres molæ molunt 12 horis modios, prima 18, secunda 13, tertia 8, quot horis universæ molent modios 24? & quantum singulæ? Adde primùm 18, 13, 8, facies 39, prima quæstio sic erit 39, 12, 24

Dices igitur 39 modii moluntur 12 horis: ergo 24 moluntur horis $7\frac{5}{13}$. Tum de tribus molis triplex erit quæstio: prima sic. Prima mola molit 12 horis 18 modios: Ergo prima mola horis $7\frac{5}{13}$, quot modios molet? dicito. 12 dant 18: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $11\frac{1}{3}$.

In secunda & tertia dicito,

12 dant 13: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt 8. item

E

12 dant 8: ergo $7\frac{5}{13}$ dabunt $4\frac{12}{13}$.

Fons duas fiſtulas habet, prima implet lacum horis 4, ſi ſola fluat, ſecunda vacuat horis 11, ſi illa obſtructa ſit: Si uná fluant, quot horis implebitur lacus? Diſtinguito proportiones antecedentes, & dicito,

4 horæ implent lacum: ergo 1 hora implet $\frac{1}{4}$ lacus. deinde

11 horæ vacuant lacum, ergo 1 hora vacuat $\frac{1}{11}$ lacus. Jam ut ſola impletio maneat, tolle $\frac{1}{11}$ ab $\frac{1}{4}$, reſtabunt $\frac{7}{44}$ lacus, quæ implentur 1 hora, inde quæſtionis proportio concludetur.

$\frac{7}{44}$ lacus implētur 1 hora: ergo $\frac{44}{44}$ implentur $\frac{44}{7}$ horæ, id eſt 6 horis & $\frac{2}{7}$ unius horæ. Sed quia nominum in diviſione nulla eſt ratio iis rejectis, & in hoc & in cœteris omnibus exemplis, expeditiús concludes. Statues igitur proportionis hujus terminos hoc modo,

7, 1, 44, $\frac{44}{7}$, id eſt $6\frac{2}{7}$.

Lacus fontis tres fiſtulas habet, quarum prima uacuat lacum $\frac{1}{4}$ horæ, ſecunda $\frac{1}{2}$, tertia hora integra, quanto tempore fluētes ſimul omnes vacuant lacum? Dices hic ut anteá.

$\frac{1}{4}$ horæ vacuat ſemel, ergo 1 hora vacuat quater. Itaque $\frac{1}{2}$ vacuat bis, 1 hora ſemel, adde has vices, habes 7, & dicito,

Lacus vacuatur ſepties 1 hora, ergo vacuatur ſemel $\frac{1}{7}$ horæ, termini ita ſunt,

7 1 1 $\frac{1}{7}$.

Leo fontis 4 fiſtulas habet, quarum prima imple plet subiectum lacum 24 horis, secunda 36, tertia 48, quarta 6: Si simul fluant, quot horis implebunt? facito proportiones antecedentes,

24 horæ implent totum, ergo 1 implet $\frac{1}{24}$ lacus.

36 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{36}$ lacus: 48 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{48}$ lacus.

6 horæ implent totum: ergo 1 implet $\frac{1}{6}$ lacus. Adde jam partes impleti lacus 1 hora, habebis $\frac{37}{144}$, quales 144 totum faciunt, rejectis itaq; iisdem nominibus, dices,

37 partes lacus implentur 1 hora: ergo 144, id est totus, impletur 3 horis & $\frac{33}{37}$ unius horæ.

Cap 13. de proportione disjuncta, inversa.

Proportio disjuncta directa adhuc fuit, qua inversa utendum est, quoties rerum comparatarum proportio ejusmodi est, ut quantó magis aliæ crescant, tantó magis aliæ minuantur. Itaque primus terminus hic pro quarto quærendus est.

Amphora sufficit 3 dies 30 convivis, 6 dies, quot convivis sufficiet? termini quæstionis ita sunt, 3, 30, 6. Factus autem á primo & secũdo est 90, quo diviso in 6, quotus erit 15 pro primo inverso, tota proportio sic est, 15, 3, 30, 6.

Commeatus suppetit 7 menses 3000 obsessis militibus: 12 menses, quot obsessis suppetet? termini proportionis ita sunt, 1750, 7, 3000, 12.

Cúm modius tritici vænit 5 aureis, tum panis quadrantis est 4 unciarum: ergo cúm vænit 3, panis erit unciarum 6 & $\frac{2}{3}$, & hic primus terminus directæ proportionis est quartus.

Pannus latus 6 ulnas, longus 7, vestiendus est æquali panno lato 3 ulnas, longitudo igitur erit 14 ulnarum.

15 boves arant decem jugera 8 diebus, quare 20 boves 10 jugera arabunt diebus 6. In iis quæstionibus res eadem iterata proportionis terminum nullum facit, tanquam de agro aliquo ageretur, & ita concluderetur,

15 boves arant 8 diebus, quare 20 arabunt 6.

Tale est Aristotelis exemplum 1 cap 1. de cœlo, cúm ait, Proportionem quam habent pondera, tempora, ἀνάπαλιν, id est inverso modo habebunt, ut si dimidium pondus in tali, duplum in dimidio hujus. Esto igitur Aristotelea proportio. Pondus 20 librarum descendit certum spatium horis 2, pondus igitur 40 librarum, idem spatium descendet hora 1. Proportionis termini ita sunt, 1, 20, 2, 40.

Trium mercatorum primus contulit aureos 60 per 6 menses, secundus autem per 7 menses, tertius per 5 sortem nescio quam contulerint, lucrum autem fuerit singulis aureorum 30: quanta est sors secundi, quanta tertii? Dicito: 6 menses lucrantur 30 ex 60, ergo lucrantur tantundem 7 menses ex 51 $\frac{3}{7}$, & 5 menses ex 72.

Caput

Caput 14. de additione proportionis.

Hactenus proportionis disjunctæ doctrina fuit tum directæ tum inversæ, propria differentia sequitur ex additione & duplicatione terminorum.

71. *Additio proportionis est additio terminorum.*

Estque duplex.

72. *Additio proportionis prima est assumptio antecedentis & consequentis ad consequentem.* 14.*d*.5.

Ut 2 ad 4, sicut 3 ad 6: ergo 2 & 4, id est 6 ad 4, ut 3 & 6, id est 9 ad 6.

73. *Additio proportionis secunda, est assumptio omnium antecedentium ad omnes consequentes.* 12.*p*.7.

Ut 2 ad 4, sic 3 ad 6: ergo 2 & 3, id est 5 ad 4 & 6, id est 10, ut 2 ad 4.

Hæc secunda proportionis additio propter quotidianum usum in cõsortio & societate mercatorum vulgò regula societatis appellata est. Quarè ejus utilitas pluribus exemplis est illustranda.

Duorum sociorum primus contulit aureos 8, secundus 6, unde lucrati sunt aureos 7, quantum ſingulis accedit? Quæſtio additis antecedentibus ita ſolvetur:

	8	4,
14 dant 7 : ergo		
	6	3.

& contra ſors concluditur.

	4	8
7 dant 14 : Ergo		
	3	6

Tres mercatores contulerunt aureos, primus 90, ſecundus 60, tertius 50, lucratique ſunt aureos 100, quantum ſingulis accedit? Adde antecedentes, ut anteá, & conclude,

	90	45
200 dant 100 : ergo	60	30
	50	25

Contrá ſingulares ſortes ex additis conſequentibus concludentur:

	45	90
100 dant 200 : ergo	30	60
	25	50

Octo creditoribus debentur aurei, primo 15, ſecundo 24, tertio 32, quarto 54, quinto 60, ſexto 75, ſeptimo 86, octavo 100: Sed bona debitoris tantummodo valent aureos 150. Itaque omnibus omnino ſatisfieri non poteſt. Ad proportionis igitur æquitatem recurretur: quantum ſingulis pro rata bonorum portione perſolvetur? Ex additis antecedentibus ita concludes,

	15	$5 \frac{20}{446}$
	24	$8 \frac{32}{446}$
	32	$10 \frac{340}{446}$
	54	$18 \frac{72}{446}$
446 dant 150: ergo	60	$20 \frac{80}{446}$
	75	$25 \frac{100}{446}$
	86	$28 \frac{412}{446}$
	100	$35 \frac{282}{446}$

Aurei 200 tribus ea conditione partiendi, ut primus triplo plus habeat quám secundus, & secundus quadruplo quám tertius. Hic ab extremo incipe. Si tertius habeat 1, secundus habebit 4, & primus 12, quibus additis, conclude,

	12	$141 \frac{3}{17}$
17 dant 200: ergo	4	$47 \frac{1}{17}$
	1	$11 \frac{13}{17}$

Hæreditas 3000 legata quinque fratribus ea cõditione, ut obveniat primo $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{3}$, tertio $\frac{1}{4}$, quarto $\frac{1}{5}$, quinto $\frac{1}{6}$. Id, uti proponitur, fieri nõ potest, quia datæ partes superant totum. recurratur igitur ad æquitatis proportionem, & numerus inveniatur, qui minimus habeat datas partes. Hic enim est usus talis numeri, quoties datæ partes totum superant, & inventi partes inveniantur datis illis cognomines, quæ æqualiter quinque fratribus assem partiantur. Minimus veró divisus á datis partibus est 60, cujus partes, partibus illis datis cognomines sunt. 30, 20 15, 12, 10. Has igitur partes adde, & dic per auream regulam,

	30	1034	$\frac{42}{87}$
	20	687	$\frac{57}{87}$
87 dant 3000: ergo	15	517	$\frac{21}{87}$
	12	413	$\frac{69}{87}$
	10	344	$\frac{72}{87}$

Tres partiuntur 100 ea conditione, ut primus capiat $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, secundus $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{5}$, tertius $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$. Id item, sicuti proponitur, fieri non potest, quia partes totum superant. Æquitas ergo proportionis adhibeatur. Itaque sumes primò minimum divisum 60, cujus divisores datis partibus cognomines sunt 20 & 15 pro primo, 15 & 12 pro secundo, 12 & 10 pro tertio, quibus primùm separatim additis, sunt 35, 27, 22. Deinde simul sunt 84: conclude igitur,

	35	41	$\frac{2}{3}$
84 dant 100: ergo	27	32	$\frac{1}{7}$
	22	26	$\frac{4}{21}$

Quatuor sic partiuntur 600 aureos, ut primus habeat $\frac{2}{3}$ & 9 aureos, secundus $\frac{3}{5}$ & 8, tertius $\frac{5}{6}$ & 7, quartus $\frac{7}{8}$ & 6. Hic item partes majores sunt toto. Ad illud igitur proportionalis æquitatis judicium refugiamus, & quatuor in hoc exemplo superiorum dissimilia distinguamus, primò nominum propositorum, præteritis numeris

meris & integris: aſſumendus minimus diviſus eſt, hic erit 120, ſecundó partes cognomines inventæ per ſuos numeros multiplicandæ. Itaque $\frac{2}{3}$ erunt 80 $\frac{3}{5}$, 72 $\frac{5}{6}$, 100 $\frac{7}{8}$. 105 tertió é 600 ſumma dividenda, tollantur integri numeri 9, 8, 7, 6, id eſt 30, manebunt 570 pro additis conſequentibus: quartó denique inventis quartis proportionalibus, addes primo 9, ſecundo 8, tertio 7, quarto 6. Totum exemplum ſic erit.

	80	136	$\frac{261}{357}$
357 dant 570: ergo	72	122	$\frac{342}{357}$ vel $\frac{114}{119}$
	100	166	$\frac{237}{357}$
	105	173	$\frac{255}{357}$ vel $\frac{85}{119}$

Cap. 15. de alligatione.

Alligationis regula quæ dicitur, hac proportionis additione multúm utitur: tametſi ipſa per ſe nulla eſt proportio.

74. *Alligatio eſt æquatio medii cum extremis inæqualibus per alternam ab eo differentiam.*

Ut ſi é duobus vini generibus, quorum primum valeat 6, ſecundum 12, miſcẽdum ſit quod valeat 10, alternæ differentiæ extremorum 6 & 12 á medio 100 erũt 2 & 4 quæ ſignificabũt, ſi 2 ſumantur primi generis, 4 assumenda secundi. Itaque si sextarii 6 miscendi sint, alligatio perfecta erit, ut hic vides,

	6	2
10		
	12	4

Hujus æquationis caussa est é communibus regulis multiplicationis. Nam si multiplices 10 per 6, compones 60, item si multiplices 10 per 2 & 4 segmenta alterius multiplicati, compones duos compositos 20 & 40 æquales primo composito, tum si multiplices eadem segmenta 2 & 4 per totum 10 alterno segmento, nunc auctum, nunc minutum, id est per 12 & 6, compones duos cōpositos 48 & 12, primo composito æquales, ut hic vides,

10	10	10	6	12
6	2	4	2	4
60	20	40	12	48

Hinc igitur patet alligationis regula, neque medius alligationis terminus est proportionis, sed medius inæqualium extremorum: Estque minor majore extremo, major minore. Sed alligationis quæstio rara est sine proportionis additione, ut in exemplo. Si unus sextarius temperādus esset é duobus illis generibus, tum alligatio facta esset, diceretur nō peti 6, sed 1. Itaque proportionis additio id explicaret hoc modo: 6 redeunt

deunt ad 1: ergo 2 redibunt ad $\frac{2}{6}$, 4 ad $\frac{4}{6}$, totaque quæſtio ſic erit,

$$\begin{array}{ccccc} & 6 & 2 & & \\ 10 & & & 6 \quad 1 & \left\{ \begin{array}{l} 2 \quad \frac{2}{6} \text{ vel } \frac{1}{3} \\ \\ 4 \quad \frac{4}{6} \text{ vel } \frac{2}{3}. \end{array} \right. \\ & 12 & 4 & & \end{array}$$

Tale eſt Archimedeum problema illud apud Victruvium lib. 9.cap.3.de aurea Hieronis regis corona ad deprehendendum aurificis furtum. Duas,inquit Victruvius,maſſas ejuſdem ponderis cum aurea corona Archimedes fecit,alteram auream,argēteam alteram,quibus viciſſim in vas aqua plenum demiſſis, é differentia effuſæ aquæ ad auream maſſam & argenteam,item ad ipſam coronam, deprehendit argenti in aurea corona miſtionem. Eſto igitur inæqualis effuſio aquæ ex aurea maſſa 20,ex argentea 36,ex ipſa regis corona 24. Sumptis differētiis, vides auri triplum, argenti ſubtriplum in corona permiſtum eſſe: Et ſi corona 16 pondo eſſet,eſſent auri 12,argenti 4, & hæc alligatio eſt. At ſi alterius pōderis ea fuerit,ſimilem rationē proportionis additione concludes, ut ſi fuerit 100 pondo, quæſtionis explicatio tota ſic erit,

$$\begin{array}{ccccc} & 20 & 12 & & \\ 24 & & & 16 \quad 100 & \left\{ \begin{array}{ll} 12 & 75 \\ \\ 4 & 25 \end{array} \right. \\ & 36 & 4 & & \end{array}$$

Talis eſt in permiſcendis metallis quotidiana ratio, ut ſi aurifex habeat 100 pondo argenti,quorum unum valeat 17. Item alteram habeat maſſam,cujus pōdo valeat 24, quantū argenti é ſecunda maſſa addet primæ,ut pondo valeat 22, & quantum denique omnino futurum eſt? Alligatio alternarum differentiarum ſic erit,

	17	2
22		
	24	5

Unde concludes 2 pondo primi argenti, 5 pondo ſecundi requirunt: Ergo 100 requirunt 250: quibus adde 100,é prima maſſa habebis 350 pondo miſti argenti.

Alligationis cauſſa eadem fuerit, ubi termini non tantúm tres,ſed quotlibet proponentur: Bini ſiquidem extremi ad unum medium perpetuó conferendi: ut vini genera quatuor ſunto, primique amphora valeat 7 aureos,ſecundi 9, tertii 10,quarti 12, & miſcendæ ſint amphoræ 300, quæ ſingulæ valeant 11 aureos, diſpoſitis terminis,differentiiſque alterné alligatis, tota quæſtio ſic erit,

	7		1		1	30
	9		1		1	30
	10		1		1	30
11				10	300	
	12	4	21		7	210

Nihil veró intereſt,utrum majores termini ſint plures: ut 400 pondo ficuum,amygdalarum,zingiberis,piperis, moſchocaryorum, croci,emuntur 200 libellis: Librá autem ficuū emitur 6 ſolidis,

lidis, amygdalarum 7, zingiberis 9, piperis 11, moschocaryorum 12, croci 16. Quot igitur sunt pondo singulorum generum? Hic preciorum permistio & alligatio est. Sume itaque precium unius libræ pro medio quantitatis, sic,

400 pondo emuntur 200 libellis:
Ergo 1 emitur $\frac{200}{400}$ vel $\frac{1}{2}$ libellæ,
id est 80 solidis.

Tum singulorum generum pretia ipsi subscribe in eadem moneta, quæstio tota sic erit,

6	ficu.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
7	amyg.	1	2	6		9	70	$\frac{10}{17}$
9	zingib.	1	2	6		9	70	$\frac{20}{17}$
10					51. 400			
11	pip.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
12	mosch.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$
16	croc.	1	3	4		8	62	$\frac{38}{51}$

Adhuc additio proportionis fuit, cui subductio proportionis est in elementis opposita.

75. *Subductio proportionis, est assumptio reliqui termini.*

Estque duplex.

76. *Subductio proportionis prima, est assumptio reliqui termini ad subductam.*

Ut 6 ad 4, sicuti 9 ad 6: ergo 2 ad 4, ut 3 ad 6. itaq;

77. *Si fuerit ut totus ad ſubductum, ſic totus ad ſubductum, reliquus erit ad ſubductum, ut reliquus ad ſubductum.*

78. *Subductio proportionis ſecunda, eſt aſſumptio reliqui ad reliquum.*

Ut 5 ad 10, ut 2 ad 4: ergo ut 5 ad 10, ſic 3 ad 6. itaque

79. *Si fuerit ut totus ad totum, ita ſubductus ad ſubductum, reliquus erit ad reliquum, ut totus ad totum,* 19. *p.* 5.

Cap. 16. de duplicatione proportionis.

Jam de duplicatione proportionis dicendum eſt.

80. *Duplicatio proportionis, eſt aſſumptio facti á primo & ſecundo pro primo, & facti á quarto & quinto pro tertio, unde ſextus pro quarto concluditur.*

Ut ſi quæratur, 10 boves 7 diebus arant 35 jugera, 20 boves 24 diebus quot jugera arabunt? termini quæſtionis 5 ita erũt, 10, 7, 35, 20, 24. Factus veró é 10 & 7 erit 70 pro primo termino, factus é 24 & 20, erit 480 pro tertio, unde concludes

cludes pro quarto 240, terminique proportionis duplicis sic erunt,

10	7	35	20	24
70		35	480	240

Hic veró duplex proportio permiscetur, prima simplex & directa est boum & jugerum. 10 boves arant 7 diebus 35 iugera: ergo 20 boves eodem tempore arabunt 70. Hic tempus idem nullum proportionis terminum facit, tanquam diceretur, cúm 10 boves arant 35 jugera, 20 boves arant 70. Secunda proportio simplex est, 20 boves arant 7 diebus 70 jugera: ergo idem 20 diebus arabunt 24 jugera. Hic tempora diversa faciunt terminos proportionis, idem 20 boum numerus nullum terminum facit. Caussa autem cur illi duo facti pro quatuor simplicibus assumantur, est, quod ratio tertii 35 ad sextum 240 fit é ratione 10 primi ad 20, quartum & ratione 7 secũdi ad 24 quintum, quæ ratio est duorum factorum 70, 480: 3 aurei 2 mensibus lucrantur aureos 6, aurei 4 mensibus tribus quot lucrabuntur? Hic si facias 6 é 3 & 2: item 12 & 4 & 3, & concludas 6 dant 6, ergo 12 dant 12, nihilo plus facies, quám si dixisses, 2 dant 6, ergo 4 dant 12, quia multiplicati per eundem 3 fiunt. Itaque factorum & facientium est eadem ratio. Quare quoties in tali duplicatione æquales termini sic occurrent, æqualibus terminis omissis, proportio concludenda est. Sed ubertas regulæ est uberiús explicanda.

Trium mercatorum primus contulit 44 per per 8 menſes, ſecundus 32 per 6 mẽſes, tertius 24 per 4 menſes, unde lucrati ſunt aureos 80, quantum ſingulis ex hoc lucro cedet? Multiplica ſortem quamque cum ſuo tempore, primi factus eſt 352, ſecundi 192, tertii 96, & ſingulis jam additis, dicito per auream regulam,

	352	44
640 dant 80 : ergo	192	24
	96	12.

Legio habet pedites 6100, equites 726, & peditis ſtipendiũ eſt 4 aurei, equitis 9, præda aureorum 2000 his dividenda, quantum ſingulis dabitur? Multiplica numeros perſonarum, ſtipendiorum: primus factus erit 24400, ſecundus 6534, tum facti addantur, erunt 30934, & dic per auream regulam,

	24400		1577 $\frac{17088}{30934}$
30934 dant 2000: ergo		dant	
	6534		422 $\frac{13852}{30934}$

Canonici 12, & ſacellani 20, partiuntur quotannis aureos 3000, ſed ea lege ut canonicus 5 capiat, quoties ſacellanus 4, quantum igitur eorum ſtipendium eſt annuum? Multiplica numeros perſonarum & ſtipendiorum, primus erit 60, ſecundus 80, qui additi ſunt 104. dic igitur.

	60	1285 $\frac{5}{7}$
140 dant 3000: ergo		
	80	1714 $\frac{[illegible]}{3}$.

Inter-

81. *Interdum faciendi termini complures é variis generibus sortium, temporum, personarum, aliarumve rerum, in unumque tandem omnes addendi.*

Quatuor mercatorum biennii societate inita, primus 30 aureos cõtulit, sed octavo post mẽse 10 subduxit, iterumq; vicesimo mẽse ineunte 12 cõtulit, secũdus initio 24 cõtulit, ac sexto post exacto mense subduxit 8. Denuoq; sexti decimi mensis initio 14 retulit, tertius initio contulit 20. & septimo post mẽse exacto omnes subduxit, sed decimoseptimo post exacto mẽse 16 retulit, quartus septimo mẽse ineunte, 18 aureos contulit, sed quarto post exacto mẽse 9 subduxit, iterũq; decimoseptimo mense incipiẽte 15 addidit, lucrũ ex omnibus his summis factũ est 100 aureorũ. Singulorũ igitur pecunias & tẽpora in suum numerũ rediges: primi 30 aurei & 8 menses faciunt 240: deinde reliqui 20 aurei & 11 mẽses faciunt 220, postea 20 aurei & 12, id est 32 & mẽses 5 faciunt 160. Deniq; facti tres additi sũt 620. Secũdi mercatoris 24 aurei & 6 menses faciunt 144: Deinde reliqui 16 & 9 menses faciunt 144, tum additi aurei 14 & 16, id est 30 cum 9 mẽsibus, faciunt 270. Hi tres facti additi sunt 558. Tertii 20 aurei & 7 menses faciunt 140: Deinde 16 aurei & menses 7 faciunt 112. Hic factus additus priori, constituit 252, quarti 18 aurei & 4 menses faciunt 72, tum 9 aurei & menses 6, faciunt 54. Denique 9 & 15, id est 24 aurei & 8 menses, faciunt 192. Hi quatuor facti additi, sunt 318. Colligamus tandem hos quatuor factos, & dicamus per aureã regulã.

	620	35 $\frac{205}{437}$
	558	31 $\frac{463}{437}$
1748 dant 100 : ergo		
	252	14 $\frac{182}{437}$
	318	18 $\frac{84}{437}$

Cap.17. de duplicatione proportionis inversæ.

Proportionis duplicatio aliquando invertitur.

82. *Duplicatio proportionis inversæ, est assumptio facti á primo & quinto pro primo, & facti á tertio & quarto, pro tertio, unde sextus pro quarto inversé concluditur.*

Ut hic: 2 messores 4 diebus demetunt 6 jugera, 8 messores 12 jugera, quot diebus demetent? invenies 2, quæstioque tota sic erit,

2,	4	6,	8,	12
2,	24	4	48	

Hic etiam ut in directa, proportio duplex permiscetur, quam potes ita separatim concludere, primó inversé: duo demetunt 6 jugera 4 diebus, ergo 8 demetent jugera eadem 1 die. Hæc proportio est inversa hoc modo, 1, 2, 4, 8.

Secun-

Secunda directa est, sic: 8 messores demetunt 6 jugera 1 die: ergo iidem demetent 12 jugera 2. Caussa est hic superioris similis, quia ratio 4 secundi termini ad 2 quartum, est facta é rationibus 8 quarti ad 2 primum, 6 tertii termini ad 12 quintum, quæ duæ rationes faciunt terminos primum 24, & tertium 48.

Cap. 18. de proportione continua.

Proportio disjuncta generatim descripta est, jam tempus est de continua dicendi.

83. *Proportio continua est, quãdo quæ ratio est primi termini ad secundum, eadem est secundi ad tertium.*

Ut in 2, 4, 8. Continuæ proportionis proprietas ex aurea regula sic est,

84. *Si tres numeri fuerint cõtinué proportionales, factus ab extremis erit æqualis facto á medio: & si factus ab extremis fuerit æqualis facto á medio, tres numeri erunt cõtinué proportionales.* 20.*p*.7.

Ut in 2, 4, 8 facto ab extremis 16 est æqualis 16 facto á medio. Hinc sequitur inventio tertii proportionalis,

85. *Si datis duobus numeris primus di-*

~~viserit factum á secundo, quotus erit tertius proportionalis.18.p.9.~~

Ut in datis 2 & 4, multiplica 4 per sese, facies 16, quem 2 primus dividit in 8. Itaq; 8 est tertius proportionalis: ut in 2, 4, 8. Itaque

86. *Si duo numeri habuerint tertium proportionalem, erunt facti inter se.* 16.*p*.9

Quatuor amicorum primus accipiat aureos tres, secundus 6, tertius tantó plures secundo, quantó plures secundus habet primo, & quartus item tantó plures capiat tertio, quátó plures tertius capit secundo, quot habebit igitur tertius? quot quartus? Inveni duobus datis tertium continué proportionalem, & iterum duobus ultimis tertium continué proportionalem, quæstio soluta est, erunt enim termini continui 3, 6, 12, 24.

87. *Si continuorum primus diviserit secundum & antecedens quisque dividet consequẽtem alium: & si antecedens quisque diviserit ullum consequẽtem, primus etiam dividet secũdum.* 6. *&* 7.*p*.8.

Ut in 1, 2, 4, 8, 32. 64. Itaque

88. *Si ab unitate numeri fuerint continui, minor dividet majorem per aliquẽ datorum continuorum.* 11.*p*.9.

Ut

Ut in proximo exemplo.

89. *Si fuerint numeri continué proportionales, ratio primi ad secundum duplicabitur in tertio, triplicabitur in quarto: & sic deinceps ratio primi ad extremum fiet ex omnibus intermediis rationibus.* 10.*d*.5.

Ut in 3, 9, 27, 81: ratio 27 ad 3 est duplicata ratio 9 ad 3: ut hic vides in contractis terminis,

$$\frac{3}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \left(\frac{9}{1}\right.$$

Sic ratio 81 ad 3, est ratio triplicata 9 ad 3, ut hic constat in contractis terminis

$$\frac{3}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{5}{1} \quad \left(\frac{27}{1}\right.$$

Denique ratio extremorum fit ex omnibus rationibus intermediis: imó veró

90. *Si fuerint quotlibet rationes terminis quomodocunque continuæ, ratio extremorum fiet ex omnibus intermediis rationibus.*

Ut in 1, 2, 3, 4, 5: ratio 5 ad 1 fit é rationibus.

$$\frac{2}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \left(\frac{120}{24}\right. \quad \left(\frac{5}{1}\right.$$

E continuationis autem geometricæ natura inventa est hæc regula.

91. *Libræ terminis duplæ & triplæ continuationis comprehensæ, totidem cognominibus ponderibus appenduntur.*

Sic libræ usque ad 7 appenduntur tribus põderibus, quorum primum unius libræ, secundum binarium, id est duarum librarum, tertium quaternarium, quia progressionis 1, 2, 4 termini tãtum comprehendunt: sic libræ usque ad 15 appẽduntur 4 ponderibus hac progressione significatis 1, 2, 4, 8: Sic libræ 31 ponderibus hujus continuationis 1, 2, 4, 8, 16: Sic in tripla ratione, libræ usque ad 40, appenduntur ponderibus hac progressione significatis, 1, 3, 9, 27. Sic libræ usque ad 121 appenduntur his ponderibus, 1, 3, 9, 27, 81, & sic deinceps libræ terminis triplæ progressionis comprehẽsæ, totidem cognominibus ponderibus appendentur.

Julianus juriscõsultus de liberis & posthumis hæredibus instituendis generis hujus quæstionẽ proponit Digest. lib. 28. Si ita scriptum sit: Si mihi filius natus fuerit, ex besso hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto. Si veró filia mihi nata fuerit, ex triẽte hæres esto, ex reliqua parte uxor mea hæres esto: & si filius & filia nati essent, dicendum est assem distribuendum esse in 7 partes, ut ex his filius 4, uxor duas filias unam partem habeat. Ita enim secundum voluntatem testãtis filius altero tanto amplius habebit quám uxor,

uxor, item uxor altero, tantó amplius habebit quám filia. Licet enim ſubtili juris regulæ conveniat ruptum fieri teſtamentum: Attamen cúm & utroque nato teſtator voluerit uxorem aliquid habere, ideo ad eiuſmodi ſententiam humanitate ſuggerente decurſum eſt, quod etiam inventio Celſo apertiſſimé placuit. Hæc juriſconſultus: unde intelligimus ex volũtate teſtatoris tres numeros continué proportionales in dupla ratione inveniendos eſſe. Sumes itaque minimos 4, 2, 1, ac ſi hæreditas fuerit 70 coronatorum, ex additis illis terminis quæſtio hæriſcundæ familiæ ita ſolvetur.

	4		40
7 dant 70: ergo	2	dant	20
	1		10

Quód ſi uxor tres filios & duas filias pepererit, tres quaternarii pro tribus filiis, & duo binarii pro duabus filiabus aſſumendi. Adde igitur omnes & conclude,

	4		$17 \frac{1}{2}$
	4		$17 \frac{1}{2}$
	4		$17 \frac{1}{2}$
16 dant 72: ergo		dant	
	2		$9 \frac{3}{8}$
	1		$4 \frac{3}{8}$
	1		$4 \frac{3}{8}$

92. *Si duo numeri multiplicentur uterque per utrunque, fient tres continué proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient continué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet continui in data ratione. é 2.p.8.*

Ut hic vides

			2		4			
		4		8		16		
	8		16		32		64	
16,		32,		64,		128,		256.

93. *Si duo numeri habuerint continué medios, duo proportionales datis habebũt totidem per datam rationem. 8.p.8.*

Ut in exemplo

8	12	18	27
32	48	72	108

inter 8 & 27 sunt duo medii 12 & 18, inter 32 & 108 rationis eiusdem nempe $3\frac{3}{8}$ sunt etiam duo 48 & 72, qui medii inveniũtur per datam rationem 8 ad 12, sic dices 32 ad 48.

94. *Si duo numeri & unitas habuerint totidem continué medios, dati inter*

se

se etiam totidem habebunt.10.p.8.

Ut hic,

		1				1		
	2		4			2		3
4	8		16		4	6		9
8,	16	32	64.	8	12	18	27.	

Deducitur é 2 p.8: sed generaliter accepta.

95. *Si continue proportionalium quilibet seipsum multiplicaverit, facti erunt continué proportionales: & si dati factos multiplicaverint, facti rursus erunt continué proportionales, idq; semper circa extremos accidet.13.p.8.*

Ut hic,

2	4	8
4	16	64
8	64	512

Caput 19. de inventione optati termini.

96. *Si arithmeticé ab unitate cōtinui, geometricé á numero cōtinuis respondeāt, arithmetici geometricorū indices erunt, et factus á duobus geometricis, tātus erit suæ progressionis terminus, quantus est simul-*

uterque arithmeticorum multiplicatis respondentium.

Ut in hac progressione dupla,

1	2	3	4	5	6
2	4	8	16	32	64

Arithmetici enim 1, 2, 3, &c indicant 2, 4, 8, esse progressionis primum, secundum, tertium terminum. Itaq; si quæras terminum quempiã, ut septimum, adde indices eum constituentium numerum, ut 3 & 4, & multiplica geometricos iis respondẽtes 8 & 16, facies 128 septimũ terminũ progressionis. Sic erit in hac progressione tripla,

1	2	3	4	5
3	9	27	81	243

Si quæras nonum, multiplica 243 per 81 respondentes arithmeticis indicibus 4 & 5, constituentibus 9, facies 9,683 nonum terminũ. Hæc termini optati est inventio.

Caput 20 de continuè minimis,

Proportio continua nõ solũ recipit communem ad minimos contractionem, sed de iis peopriam institutionem habet.

97. *Si duo minimi datæ rationis numeri multiplicentur uterque per utrunque, tres fient minimi continuè proportionales datis, tum si facti omnes multiplicentur*

per

per datum ducem, rursumque ultimus per datum comitem, quatuor fient minimi cōtinué proportionales datis, & sic deinceps invenientur quotlibet minimi continui in data ratione.2.p.8.

Ut hic vides,

			2		3			
		4		6		9		
	8		12		18		27	
16		24		36		54		81.

98. *Si duo inter se primi habuerint cōtinué medios, uterque & unitas habebūt totidem.9.p.8.*

Ut patet in proximo exemplo.

99. *Si fuerint quotlibet continué proportionales extremorum inter se primorū, erunt minimi proportionalium: & si fuerint minimi proportionalium, erunt extremorum inter se priomrum.1.&.3.p.8.*

Ut in 8,12,18,27. Nam cúm sint extremi inter se primi, omnes uná & medii & extremi, primi inter se erunt, itaque minimi.

100. *Si continuatio fuerit extremorum inter se primorum, erit maxima.17.p.9.*

Ut in 8, 12, 18, 27. Atque hæc de proportione ſimplici.

Cap.21.de æquatione.

101. *Proportio conjuncta eſt,quæ conjungitur é proportione diſjuncta & continua:*

eaque triplex in elemétis inſignis eſt æquatio, exuperati ultimi ad præcedentes, Inventio continué minimorum in datis rationibus.

102. *Æquatio eſt,quando poſitis in uno ordine quotlibet numeris,aliiſque totidem in altero, binis ſumptis in eadem ratione, fuerit ut primi ordinis primus ad ultimũ, ſic ſecundi ordinis primus ad ultimum.*

Itaq; in continuanda æquatione, termini proportionis utrinque extremi duntaxat aſſumendi ſunt,mediis intermiſſis : eſtque directa vel inverſa.

103. *Æquatio directa eſt, quando fuerit ut primi ordinis primus ad ſecundum,ſic ſecundi primus ad ſecundum : itemque ut primi ordinis ſecundus ad tertium ,ſic ſecundi ſecundus ad tertium.*

Ut

Ut hic vides in tribus exemplis quæ continuari in unum poſſunt.

9,	6,	3,	9,	6,	9,	3,	6,	9,
12	8	4	12	8	12	4	8	12.

quo genere proportionis plurimæ in elementis demonſtrationes á Theone concluſæ ſunt.

104. *Æquatio inverſa eſt, quãdo fuerit ut primi ordinis primus ad ſecundum, ſic ſecundi ſecundus ad tertium: utque primi ſecundus ad tertium, ſic ſecũdi primus ad ſecundum.*

Ut vides in tribus exemplis,

9,	8,	6,	9,	8,	9,	32,	16,	8,
24	18,	16,	16,	18,	16,	8,	4,	3,

Hic enim ut 9 ad 8, ſic 18 ad 16: item ut 8 ad 6, ſic 24 ad 18, & ſimiliter inverſo ordine in reliquis exemplis. Difficile autem ſit in numeris integris terminos proportionis inverſé æquatos cõtinuare: continuari tamen poſſunt ordine non ſolúm inverſo, ſed in contrarias partes tendente, ut hic vides,

6, 3, 2, 1, 3, 4, 3, 1, 2,
12, 24, 6, 8, 24, 12, 8, 4.

Hic enim æquatio eſt, cúm ſit extremorũ eadem ratio in utroque ordine, tum inverſa, ut res ipſa oſtendit. Hoc proportionis genus minus uſitatum eſt, eo tamen Archimedes utitur quarto theoremate ſecundi de ſphæra.

Cap.22. de exuperantia ultimi ad præcedentes.

105 *Si fuerint quotlibet numeri continué proportionales, ſubducantur autem á ſecundo & ultimo æqualis primo, erit ut ſecundi exuperantia ad primum, ſic ultimi exuperantia ad ſeipſum præcedentes omnes.* 13.*p*.9.

Ut hic 2 4 8
2 6

Tolle 2 á 4,& ab 8 item tolle 2, ut 2 exuperantia ſecundi ad primum 2,ſic 6 exuperantia ultimi ad 2 & 4 antecedentes, par enim utrobique ratio eſt,ſic in 2 8 32
6 30

Ab 8 tolle 2,& totidem á 32,manent 6 & 30, atque ut 6 ad 2,ſic 30 ad 8 & 2,id eſt ad 10. Fac periculum in majori ſerie,ut in

2, 4, 8, 16 32, 64
2 62

A 4 ſecũdo tolle 2:item á 64 ultimo tolle 2,jam erit 62,ſic ad omnes antecedentes, ut 2 exuperãtia ſecundi ad 2 primum,utrobique enim æqualitas. Ex hac regula invẽitur ſumma progreſſio-

tia

nis geometricæ, quæ est cõpendiaria additio numerorum continua geometricæ proportionis ferie continuatorũ. Nam facta subductione primi termini á fecũdo & ultimo, habes terminos tres, unde quartus similis inveniendus est æqualis omnibus ultimum præcedẽtibus, ut additus ultimo, summam compleat, sicut vides in

2	8	32
6		30

Nam ut 6 reliquus secundi se habet ad 2 primum, sic 30 reliquus ultimi ad præcedẽtes omnes 10, id est ad quartum proportionalem, ideoque hic quartus proportionalis additus ultimo, summam complet omnium, nempe 42.

Agricola promisit filio pro xeniis primo anni die in triginta continuos dies grana tritici primo unum, secundo duo, tertio quatuor, & sic deinceps duplicãdo, quæritur tricesimo die quot grana futura sint. Quæratur tricesimus terminus, id est ultimus progrossionis hujus, ut antea demõstratum est: primo sextus 64 per sese faciet 4096 pro duodecimo termino, & hic rursus ex sese faciet 16777216 pro vicesimo quarto termino, quem multiplica per 32 quintum terminũ, facies pro vicesimo nono termino 536870 32 qui tricesimus erit, si unitas pro primo numeretur. Tollatur igitur unitas á secundo & ultimo, exuperantia secũdi erit æqualis primo, Itaque inventus ultimus uno dempto erit æqualis omnibus antecedentibus: addatur uterque summa tota erit 1073741863. Id veró brevius ſiet, ſi progreſſio uno termino augeatur, & æqualibus ſublatis reliquus ultimus dividatur pro exuperantia ſecundi ſupra primum.

Cap. 23. de inventione minimorum in datis rationibus.

105. *Si datis rationibus quotlibet in minimis terminis proportionales ad ſecũdum & tertium minimi multiplicent obliqué terminos duarum primarum rationum, facti erunt continué minimi in datis rationibus: deinde ſi proportionales ad poſtremó inventum & ducem ſequentis rationis minimi multiplicent obliqué alter inventos, alter ſequentes omnes, facti erunt continué minimi in datis rationibus.* 4.*p*.8.

Ut hic vides,

5	6 |	4	3 |
10	12		9

Nam ſi ſumas minimos ad 6 & 4, habebis 3 & 2, tum ſi multiplices obliqué 6 & 5 per 2, facies

cies 12 & 10. Item si per 3 multiplices obliqué 4 & 3, facies 12 & 9 continué minimos in datis rationibus: ut enim 5 ad 6, ita 10 ad 12, & ut 4 ad 3, sic 12 ad 9. Hic autem continuatio terminorũ est in datis rationibus, ut regula præcipit, non autem cõtinuatio rationum, & hæc proportio disjuncta est rationibus, continua tantúm terminis minimis in datis rationibus, esto & aliud exemplum,

2	3	4	5	6	7
8	12		15		
16	24		30		35

In hoc exemplo proportionales ad 15 postremó inventum, & 6 ducem sequentis rationis minimi sunt 2 & 5, qui multiplicatione obliqua fecerunt 16, 24, 30, 35. Denique hac regula continuabis quotlibet minimos in datis rationibus minimorum numerorum. Habet veró & hæc continuatio usum valdé singularem, ut 100 aurei tribus dividantur ea conditione, ut quoties primus 5 capit, toties secundus 6 capiat, & quoties secundus capit 7, toties tertius capiat 9: quot aureos singuli capient? Hic duæ sunt rationes in minimis terminis, 5 ad 6, 7 ad 9, in quibus rationibus proportionales minimi continui sunt 35, 42, 54. Hoc modo

5	6	7	9
35	42		54

Adde igitur tres continuos repertos, totus erit 131, & jam dicito

	35		26 $\frac{94}{131}$
131 dant 100 ergo	42	dant	32 $\frac{8}{131}$
	54		41 $\frac{29}{131}$

Partire quatuor amicis 100 aureos, ſic, ut quoties primus capit 3, ſecundus capiat 4, & quoties ſecundus capit 5, toties tertius capiat 6. Denique quoties tertius capit 7, toties quartus capiat 8: quot aurei ſingulis cedent? hic ſunt tres rationes in minimis terminis diſſimiles 3 ad 4, 5 ad 6, 7 ad 8, in quibus continui termini ſunt 105, 168, 192. Adde continuos, totus erit 605, & dicito

	105		17 $\frac{43}{121}$
	140		23 $\frac{17}{121}$
605 dant 100: ergo		dant	
	168		27 $\frac{95}{121}$
	192		31 $\frac{89}{121}$

FINIS.

pertas nunas lo geti sati

re rerit spaclav la

exemplos

illcusetz

Remuett

[illegible]